UNIVERSITAS BHAYANGKARA JAKARTA RAYA
FAKULTAS ILMU KOMPUTER
Kampus I: Jl. Harsono RM No. 67, Ragunan, Pasar Minggu, Jakarta Selatan 12550
Telepon: (021) 27808121 – 27808882
Kampus II: Jl. Raya Perjuangan, Marga Mulya, Bekasi Utara, Jawa Barat, 17142
Telepon: (021) 88955882, Fax.: (021) 88955871
Web: fasilkom.ubharajaya.ac.id, E-mail: fasilkom@ubharajaya.ac.id

SURAT TUGAS

Nomor: ST/335/V/2023/FASILKOM-UBJ

1. Dasar: Kalender Akademik Universitas Bhayangkara Jakarta Raya Tahun Akademik 2022/2023.

2. Dalam rangka mewujudkan Tri Dharma Perguruan Tinggi untuk Dosen di Universitas Bhayangkara Jakarta Raya maka dihimbau untuk melakukan Penelitian.

3. Sehubungan dengan hal tersebut di atas, maka Dekan Fakultas Ilmu Komputer Universitas Bhayangkara Jakarta Raya menugaskan:

NO.	NAMA	NIDN	JABATAN
1.	Rafika Sari, S.Si., M.Si.	0329098902	Dosen Tetap Prodi Informatika
2.	Khairunnisa Fadhilla Ramdhania, S.Si., M.Si.	0328039201	Dosen Tetap Prodi Informatika

   Membuat Buku dengan judul **"Logika Matematika"**, yang diterbitkan oleh CV. Media Sains Indonesia, Juni 2023, ISBN: 978-623-195-371-1.

4. Demikian penugasan ini agar dapat dilaksanakan dengan penuh rasa tanggung jawab.

Jakarta, 29 Mei 2023
DEKAN FAKULTAS ILMU KOMPUTER

UNIVERSITAS BHAYANGKARA JAKARTA RAYA Fakultas Ilmu Komputer

Dr. Dra. Tyastuti Sri Lestari, M.M.
NIP. 1408206

Editor: Suci Haryanti

LOGIKA MATEMATIKA

Suri Toding Lembang | Evy Lalan Langi | Rafika Sari Dairoh | Ayunda Sri Wahyuningrum | Hersiyati Palayukan
Indah Lestari | Ni Putu Riska Damayanti
Khairunnisa Fadhilla Ramdhania | Leny Hartati
Inelsi Palengka | Beatric Videlia Remme | Elin Herlinawati
Irene Devi Damayanti | Regina Wahyudyah Sonata Ayu

BUNGA RAMPAI

LOGIKA MATEMATIKA

UU No 28 tahun 2014 tentang Hak Cipta

Fungsi dan sifat hak cipta Pasal 4
Hak Cipta sebagaimana dimaksud dalam Pasal 3 huruf a merupakan hak eksklusif yang terdiri atas hak moral dan hak ekonomi.

Pembatasan Pelindungan Pasal 26
Ketentuan sebagaimana dimaksud dalam Pasal 23, Pasal 24, dan Pasal 25 tidak berlaku terhadap:

- i Penggunaan kutipan singkat Ciptaan dan/atau produk Hak Terkait untuk pelaporan peristiwa aktual yang ditujukan hanya untuk keperluan penyediaan informasi aktual;
- ii Penggandaan Ciptaan dan/atau produk Hak Terkait hanya untuk kepentingan penelitian ilmu pengetahuan;
- iii Penggandaan Ciptaan dan/atau produk Hak Terkait hanya untuk keperluan pengajaran, kecuali pertunjukan dan Fonogram yang telah dilakukan Pengumuman sebagai bahan ajar; dan
- iv Penggunaan untuk kepentingan pendidikan dan pengembangan ilmu pengetahuan yang memungkinkan suatu Ciptaan dan/atau produk Hak Terkait dapat digunakan tanpa izin Pelaku Pertunjukan, Produser Fonogram, atau Lembaga Penyiaran.

Sanksi Pelanggaran Pasal 113

1. Setiap Orang yang dengan tanpa hak melakukan pelanggaran hak ekonomi sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf i untuk Penggunaan Secara Komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama 1 (satu) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp100.000.000 (seratus juta rupiah).
2. Setiap Orang yang dengan tanpa hak dan/atau tanpa izin Pencipta atau pemegang Hak Cipta melakukan pelanggaran hak ekonomi Pencipta sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf c, huruf d, huruf f, dan/atau huruf h untuk Penggunaan Secara Komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama 3 (tiga) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp500.000.000,00 (lima ratus juta rupiah).

LOGIKA MATEMATIKA

Suri Toding Lembang
Evy Lalan Langi'
Rafika Sari
Dairoh
Ayunda Sriwahyuningrum
Hersiyati Palayukan
Indah Lestari
Ni Putu Riska Damayanti
Khairunnisa Fadhilla Ramdhania
Leny Hartati
Inelsi Palengka
Beatric Videlia Remme
Elin Herlinawati
Irene Devi Damayanti
Regina Wahyudyah Sonata Ayu

Penerbit

CV. MEDIA SAINS INDONESIA
Melong Asih Regency B40 - Cijerah
Kota Bandung - Jawa Barat
www.medsan.co.id

Anggota IKAPI
No. 370/JBA/2020

LOGIKA MATEMATIKA

Suri Toding Lembang
Evy Lalan Langi'
Rafika Sari
Dairoh
Ayunda Sriwahyuningrum
Hersiyati Palayukan
Indah Lestari
Ni Putu Riska Damayanti
Khairunnisa Fadhilla Ramdhania
Leny Hartati
Inelsi Palengka
Beatric Videlia Remme
Elin Herlinawati
Irene Devi Damayanti
Regina Wahyudyah Sonata Ayu

Editor:
Suci Haryanti

Tata Letak:
Mega Restiana Zendrato

Desain Cover:
Nathanael

Ukuran:
A5 Unesco: 15,5 x 23 cm

Halaman:
vi, 188

ISBN:
978-623-195-371-1

Terbit Pada:
Juni 2023

Hak Cipta 2023 @ Media Sains Indonesia dan Penulis

Hak cipta dilindungi undang-undang. Dilarang keras menerjemahkan, memfotokopi, atau memperbanyak sebagian atau seluruh isi buku ini tanpa izin tertulis dari Penerbit atau Penulis.

PENERBIT MEDIA SAINS INDONESIA
(CV. MEDIA SAINS INDONESIA)
Melong Asih Regency B40 - Cijerah
Kota Bandung - Jawa Barat
www.medsan.co.id

KATA PENGANTAR

Puji syukur kami panjatkan kehadirat Tuhan Yang Maha Esa, karena berkat rahmat dan karunia-Nya sehingga buku kolaborasi dalam bentuk buku dapat dipublikasikan dan dapat sampai di hadapan pembaca. Buku ini disusun oleh sejumlah guru, dosen dan praktisi sesuai dengan kepakarannya masing-masing. Buku ini diharapkan dapat hadir memberi kontribusi positif dalam ilmu pengetahuan khususnya terkait dengan Pembelajaran Berbasis: logika Matematika.

Sistematika buku ini dengan judul "Logika Matematika" terdiri atas 15 bab yang dijelaskan secara rinci dalam pembahasan mengenai konsep dan strategi dan analisis diantaranya*:* pengantar logika, logika proposi dasar, logika proposi lanjut, ekuivalensi, bentuk normal, aturan inferensi, logika kuantor, kalimat berkuantor, aturan penarikan kesimpulan, metode pembuktian langsung, metode pembuktian tidak langsung, metode pembuktian eksistensial.

Akhirnya kami mengucapkan terima kasih yang tak terhingga kepada semua pihak yang telah mendukung dalam proses penyusunan dan penerbitan buku ini, secara khusus kepada Penerbit Media Sains Indonesia sebagai inisiator. Semoga buku ini dapat bermanfaat bagi pembaca sekalian.

Jakarta, Juni 2023
Editor

DAFTAR ISI

1

PENGANTAR LOGIKA 1

Suri Toding Lembang
Universitas Kristen Indonesia Toraja

Logika dan Logis

Kata "logika" berasal dari bahasa Yunani "*logikē*", yang berarti "seni berbicara" atau "seni berpikir". Dalam bahasa Yunani, kata "*logos*" merujuk pada kata atau ucapan, dan juga memiliki arti yang lebih luas sebagai "pikiran" atau "rasio". Oleh karena itu, "logika" bisa diartikan sebagai seni atau ilmu tentang cara menggunakan kata atau pikiran secara tepat dan sistematis. Sejarah munculnya logika sangat panjang dan kompleks, dan berawal dari zaman kuno di Yunani. Seiring dengan berkembangnya filsafat, orang-orang mulai menyadari bahwa ada aturan-aturan tertentu dalam cara berpikir dan menyajikan argumen. Ini kemudian melahirkan logika sebagai ilmu yang mempelajari aturan-aturan tersebut. Socrates adalah filsuf pertama yang menekankan pentingnya rasionalitas dan penggunaan logika dalam berpikir. Dia mengembangkan metode dialektika, sebuah metode diskusi yang memungkinkan penggunaannya dalam memperoleh pengetahuan. Plato, seorang murid Socrates, mengembangkan teorinya tentang ide atau bentuk yang ideal dan abstrak. Dia juga mengembangkan teorinya tentang logika dengan mengemukakan gagasan tentang definisi, implikasi, dan predikasi. Aristoteles, murid Plato, adalah tokoh yang paling berpengaruh dalam perkembangan logika di Yunani kuno. Ia mengembangkan sistem klasifikasi sederhana yang digunakan untuk membedakan berbagai jenis pernyataan. Aristoteles juga mengembangkan syllogisme, sebuah metode logika yang digunakan untuk menyimpulkan kesimpulan dari dua premis (Enderton, 2001). Karya-karya Aristoteles menjadi sumber inspirasi bagi para ilmuwan dan filsuf selama berabad-abad setelah kematiannya, termasuk di Eropa pada abad pertengahan dan Renaissance. Penggunaan logika yang tepat dan rasionalitas terus diterapkan dalam berbagai disiplin ilmu seperti matematika, filsafat, sains, dan komputer hingga saat ini.

Kata "logis" berasal dari bahasa Yunani "logikos", yang merupakan kata sifat dari kata dasar "logos". Dalam bahasa Yunani, kata "logikos" merujuk pada sesuatu yang terkait dengan "logos", yaitu kata, pikiran, atau rasionalitas. Dalam bahasa Indonesia, kata "logis" mengacu pada sesuatu yang masuk akal, koheren, dan konsisten dengan aturan-aturan yang berlaku. Oleh karena itu, kata "logis" sering digunakan untuk menggambarkan suatu argumen atau penalaran yang rasional dan benar. Sejarah munculnya istilah "logis", hal ini bisa ditelusuri hingga abad ke-17 ketika filsuf dan matematikawan asal Prancis, Blaise Pascal dan Pierre de Fermat, mengembangkan logika matematika modern. Mereka mengembangkan konsep probabilitas dan teori bilangan, serta memperkenalkan metode logika untuk membuktikan teorema-teorema dalam matematika. Pada abad ke-19, matematikawan asal Inggris, George Boole, mengembangkan aljabar boolean, suatu sistem matematika yang didasarkan pada logika biner (dua nilai, yaitu benar atau salah). Boole juga memperkenalkan gagasan tentang fungsi proposisional dan memperluas ruang lingkup logika matematika. Pada abad ke-20, pengembangan logika matematika semakin pesat, terutama setelah munculnya komputer dan teori komputasi. Banyak matematikawan dan ilmuwan komputer seperti Kurt Gödel, Alan Turing, dan Alfred Tarski mengembangkan teori-teori yang menjadi dasar bagi pengembangan logika matematika modern (Enderton, 2001). Saat ini, logika matematika terus digunakan dalam berbagai bidang, termasuk matematika, ilmu komputer, dan filosofi.

Istilah "logis" dan "logika" memang sering digunakan secara bergantian, namun sebenarnya memiliki perbedaan yang cukup jelas. Kata "logis" merujuk pada sesuatu yang masuk akal atau sesuai dengan prinsip-prinsip pemikiran yang benar. Dalam penggunaan sehari-hari, "logis" bisa diartikan sebagai suatu hal yang rasional atau masuk akal. Misalnya, jika seseorang mengatakan "saya tidak bisa terbang ke bulan karena hukum gravitasi", itu dianggap logis atau masuk akal. Sementara itu, kata "logika" merujuk pada ilmu yang mempelajari cara berpikir dan cara penyajian argumen secara sistematis dan benar. Dalam pengertian ini, logika adalah suatu ilmu formal yang memiliki aturan-aturan khusus untuk memastikan kebenaran suatu argumen atau kesimpulan. Dalam konteks matematika, logika dan logis seringkali digunakan secara bersamaan karena matematika adalah salah satu disiplin ilmu yang sangat terkait dengan logika. Namun, secara umum, logis lebih bersifat deskriptif dan mengacu pada kesesuaian dengan prinsip-prinsip pemikiran yang benar, sedangkan logika lebih bersifat preskriptif dan berkaitan dengan cara menggunakan prinsip-prinsip tersebut untuk menyusun dan mengevaluasi argumen secara sistematis.

Logika dan logis adalah dua istilah yang terkait erat, namun memiliki makna yang sedikit berbeda. Logika adalah suatu ilmu formal yang mempelajari cara berpikir dan penyajian argumen secara sistematis dan benar. Logika mencakup aturan-aturan dan prinsip-prinsip untuk memastikan kebenaran suatu argumen atau kesimpulan. Dalam matematika, logika digunakan untuk membuktikan teorema-teorema dan membuat argumen yang kuat. Sementara itu, logis merujuk pada kesesuaian atau konsistensi dengan prinsip-prinsip pemikiran yang benar atau masuk akal. Logis biasanya digunakan untuk menggambarkan suatu pernyataan atau argumen yang masuk akal atau tidak bertentangan dengan prinsip-prinsip dasar.

Pengertian Logika Menurut Para Ahli

Logika adalah cabang filsafat yang mempelajari cara berpikir yang benar dan konsisten, serta cara menyusun argumentasi yang baik dan valid. Para ahli logika memandang logika sebagai ilmu yang mempelajari cara berpikir yang benar dan konsisten, serta cara menyusun argumentasi yang baik dan valid. Namun, mereka memiliki pendekatan dan fokus yang berbeda dalam menjelaskan dan mengembangkan konsep-konsep logika. Beberapa defenisi logika menurut para ahli antara lain (Enderton, 2001; Hafizhuddin,2018):

1. Aristoteles (384 SM - 322 SM)

   Menurut Aristoteles, logika adalah ilmu yang mempelajari cara-cara berpikir yang benar dan cara-cara menyusun argumen yang baik.

2. Immanuel Kant (1724-1804

   Kant menyebut logika sebagai ilmu pengetahuan tentang bentuk-bentuk pemikiran.

3. Gottlob Frege (1848-1925)

   Frege menyebut logika sebagai ilmu yang mempelajari hubungan antara tanda dan makna, serta mengembangkan kalkulus predikat untuk merepresentasikan pernyataan yang mengandung variabel.

4. Bertrand Russell (1872-1970):

   Russell menyebut logika sebagai ilmu yang mempelajari hubungan antara konsep-konsep dan pernyataan-pernyataan, serta mengembangkan teori tipe-nya untuk menangani paradoks liar.

5. Alfred Tarski (1901-1983):

   Tarski menyebut logika sebagai ilmu yang mempelajari kebenaran, kevalidan, dan implikasi, serta mengembangkan semantik model untuk menjelaskan arti dari pernyataan dalam bahasa formal.

Logika mencakup konsep-konsep dasar seperti proposisi, argumen, dan validitas, serta metode dan aturan untuk mengevaluasi dan membangun argumentasi. Dalam logika, terdapat juga pembahasan tentang penggunaan bahasa formal untuk merepresentasikan pemikiran dan argumentasi, seperti kalkulus proposisi dan kalkulus predikat. Logika juga membahas tentang pemikiran induktif, yang melibatkan pengamatan dan generalisasi dari data atau fakta yang ada.

Tujuan utama dari logika adalah untuk mengembangkan kemampuan berpikir kritis dan analitis yang diperlukan dalam berbagai bidang seperti matematika, ilmu pengetahuan, filsafat, hukum, dan lain sebagainya. Dengan menggunakan logika, seseorang dapat memperoleh kemampuan untuk menyusun argumen yang kuat dan valid, serta dapat mengevaluasi argumentasi orang lain secara kritis dan objektif.

Fungsi Logika

Logika memiliki beberapa fungsi penting dalam kehidupan manusia, antara lain (Musthofa, (2015). :

1. Membantu dalam proses berpikir: Logika membantu manusia dalam berpikir secara sistematis dan kritis. Sebagai contoh, ketika seseorang mencoba memecahkan sebuah masalah matematika, dia harus menggunakan logika untuk memastikan bahwa jawaban yang diberikan benar dan valid.
2. Menghasilkan argumen yang kuat: Logika membantu manusia dalam menghasilkan argumen yang kuat dan meyakinkan. Sebagai contoh, seorang pengacara harus menggunakan logika untuk membangun argumen yang kuat dan meyakinkan di depan pengadilan.
3. Menghindari kesalahan dalam berpikir: Logika membantu manusia dalam menghindari kesalahan dalam berpikir dan membuat kesimpulan yang salah. Sebagai contoh, ketika seseorang membuat keputusan penting, dia harus menggunakan logika untuk memastikan bahwa keputusan tersebut didasarkan pada fakta dan bukan pada asumsi atau prasangka.

4. Memahami dunia dengan lebih baik: Logika membantu manusia dalam memahami dunia dengan lebih baik. Sebagai contoh, seorang ilmuwan harus menggunakan logika untuk memahami hubungan sebab-akibat antara suatu peristiwa atau fenomena dengan cara yang lebih sistematis dan akurat.
5. Mengembangkan ilmu pengetahuan: Logika merupakan dasar dalam pengembangan ilmu pengetahuan dan teknologi. Sebagai contoh, seorang peneliti harus menggunakan logika dalam merancang eksperimen dan mengambil kesimpulan dari data yang diperoleh.

Logika Matematika

Logika matematika adalah studi tentang cara-cara untuk memahami, menganalisis, dan membuktikan kebenaran pernyataan matematika menggunakan sistem formal yang telah ditetapkan. Tujuan utamanya adalah untuk mengembangkan kerangka kerja yang teratur dan obyektif untuk menganalisis dan memahami argumen dalam matematika, dengan menggunakan aturan-aturan logika yang telah ditetapkan secara formal. Dalam praktiknya, logika matematika melibatkan penggunaan simbol-simbol dan aturan-aturan untuk menggambarkan hubungan antara konsep-konsep matematika (Musthofa, 2015). Hal ini memungkinkan matematikawan untuk memodelkan masalah-masalah matematika secara formal dan membuktikan kebenaran atau ketidakbenaran suatu pernyataan matematika dengan cara yang sistematis dan objektif. Selain itu, logika matematika juga memberikan kerangka kerja untuk memahami dan mengembangkan teori-teori matematika secara lebih sistematis. Dalam hal ini, logika matematika menjadi alat penting bagi matematikawan dalam mengeksplorasi dan mengembangkan ide-ide baru dalam matematika, serta dalam memahami hubungan antara berbagai konsep matematika. Secara keseluruhan, logika matematika adalah alat penting untuk memahami, mengembangkan, dan membuktikan kebenaran atau ketidakbenaran suatu pernyataan matematika secara sistematis dan obyektif. Logika matematika biasanya diterapkan untuk mencari pembenaran dari suatu proporsi atau pernyataan

Pernyataan adalah kalimat atau ungkapan yang menyatakan suatu fakta atau opini yang dapat bernilai benar atau salah. Dalam logika, pernyataan juga disebut sebagai kalimat deklaratif karena menyatakan suatu fakta atau pernyataan. Contoh pernyataan adalah:

- Hari ini adalah hari Sabtu.
- Segitiga memiliki tiga sudut.
- Saya suka makanan pedas.
- Setiap bilangan bulat positif memiliki faktor prima.

Proposisi adalah isi dari sebuah pernyataan yang dapat dianggap benar atau salah. Proposisi adalah konsep yang lebih abstrak daripada pernyataan karena menjelaskan suatu ide atau konsep secara umum. Contoh proposisi dari pernyataan di atas adalah:

- Hari ini adalah hari Sabtu. (Proposisi: Hari ini adalah akhir pekan.)
- Segitiga memiliki tiga sudut. (Proposisi: Segitiga adalah bangun datar yang memiliki tiga sudut.)
- Saya suka makanan pedas. (Proposisi: Rasa makanan pedas disukai oleh sebagian orang.)
- Setiap bilangan bulat positif memiliki faktor prima. (Proposisi: Setiap bilangan bulat positif dapat dipecahkan menjadi perkalian faktor prima.)

Proposisi biasanya digunakan sebagai dasar untuk mengembangkan teorema-teorema matematika atau argumen-argumen logika yang lebih kompleks. Proposisi memiliki nilai kebenaran yang pasti, yaitu benar atau salah.

Perlu diingat bahwa tidak semua kalimat atau ungkapan adalah pernyataan atau proposisi. Beberapa kalimat atau ungkapan, seperti pertanyaan atau perintah, bukanlah pernyataan atau proposisi karena tidak menyatakan fakta atau opini. Contoh dari kalimat-kalimat tersebut adalah:

- Apa yang kamu makan tadi?
- Bersihkan kamarmu sekarang!
- Tolong berikan saya pensilmu.

Kalimat-kalimat tersebut bukanlah pernyataan atau proposisi karena tidak menyatakan suatu fakta atau opini yang dapat bernilai benar atau salah.

Jenis-Jenis Logika Matematika

1. Ingkaran atau Negasi

   Ingkaran atau negasi adalah suatu operasi logika yang menghasilkan proposisi baru yang kebenarannya berlawanan dengan proposisi awal. Dalam notasi logika, tanda negasi (¬) digunakan untuk merepresentasikan operasi ini (Sunaryono, 2010). Contohnya, jika proposisi awal adalah "Andi beli mobil baru", maka negasi dari proposisi tersebut adalah "Andi tidak beli mobil baru". Dalam notasi logika, dapat ditulis sebagai ¬p, dengan p merepresentasikan proposisi awal.

   Berikut beberapa contoh negasi atau ingkaran lainnya:

   Proposisi: "Saya suka makan sate." Ingkaran: "Saya tidak suka makan sate."

   Proposisi: "Cuaca cerah." Ingkaran: "Cuaca tidak cerah."

   Proposisi: "Tono berumur 25 tahun." Ingkaran: "Tono tidak berumur 25 tahun."

   Proposisi: "Joko memenangkan perlombaan." Ingkaran: "Joko tidak memenangkan perlombaan."

   Ingkaran atau negasi dari proposisi p dapat direpresentasikan dengan notasi ¬p, yang berarti proposisi yang kebenarannya berlawanan dengan p.

   Berikut ini adalah tabel kebenaran atau tabel benar-salah untuk ingkaran atau negasi (¬) dari sebuah proposisi p:

p	-p	q	-q
B	S	B	S
S	B	S	B

   Misalnya, jika p adalah "Hari ini adalah hari Minggu", maka ingkaran dari p adalah "Hari ini bukan hari Minggu" dan dapat direpresentasikan sebagai ¬p. Sementara itu, untuk proposisi q, ingkaran atau negasinya dapat direpresentasikan sebagai ¬q, yang berarti proposisi yang kebenarannya berlawanan dengan q. Misalnya, jika q adalah "5 adalah bilangan prima", maka ingkaran dari q adalah "5 bukanlah bilangan prima" dan dapat direpresentasikan sebagai ¬q.

2. Konjungsi

Konjungsi adalah salah satu jenis operasi logika yang digunakan untuk menghubungkan dua buah proposisi atau pernyataan dengan menggunakan kata "dan". Simbol yang digunakan untuk konjungsi adalah "^" atau "∧" (Sunaryono, 2010).. Konjungsi hanya bernilai benar atau bernilai kebenaran jika kedua proposisi yang dihubungkannya benar, selain itu konjungsi bernilai salah atau bernilai kebenaran.

Berikut adalah contoh dari konjungsi pada dua proposisi:

p: Saya memiliki kunci rumah

q: Saya memiliki kunci mobil

Maka konjungsi dari p dan q adalah "Saya memiliki kunci rumah dan saya memiliki kunci mobil" atau bisa ditulis sebagai p ^ q

Berikut adalah tabel kebenaran dari konjungsi:

p	q	p ^ q
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	S

Dari tabel tersebut dapat dilihat bahwa konjungsi hanya bernilai benar jika kedua proposisi yang dihubungkannya bernilai benar. Jika salah satu atau kedua proposisi bernilai salah maka konjungsi akan bernilai salah.

3. Disjungsi

Disjungsi adalah salah satu jenis operasi logika yang digunakan untuk menghubungkan dua buah proposisi atau pernyataan dengan menggunakan kata "atau". Simbol yang digunakan untuk disjungsi adalah "v" atau "∨" (Sunaryono, 2010).. Disjungsi akan bernilai benar jika salah satu atau kedua proposisi yang dihubungkannya benar. Disjungsi hanya akan bernilai salah jika kedua proposisi yang dihubungkannya salah.

Berikut adalah contoh dari disjungsi pada dua proposisi:

P: Saya memiliki kunci rumah

Q: Saya memiliki kunci mobil

Maka disjungsi dari P dan Q adalah "Saya memiliki kunci rumah atau saya memiliki kunci mobil" atau bisa ditulis sebagai P v Q.

Berikut adalah tabel kebenaran dari disjungsi:

p	q	p v q
B	B	B
B	S	B
S	B	B
S	S	S

Dari tabel tersebut dapat dilihat bahwa disjungsi akan bernilai benar jika salah satu atau kedua proposisi yang dihubungkannya bernilai benar. Disjungsi hanya akan bernilai salah jika kedua proposisi yang dihubungkannya salah.

4. Implikasi

Implikasi adalah salah satu jenis operasi logika yang digunakan untuk menghubungkan dua buah proposisi atau pernyataan dengan menggunakan kata "jika...maka" atau "jika...maka...". Simbol yang digunakan untuk implikasi adalah " $\Rightarrow$ ". Implikasi akan bernilai benar jika proposisi awal benar dan proposisi akhir juga benar (Sunaryono, 2010). Implikasi hanya akan bernilai salah jika proposisi awal benar dan proposisi akhir salah.

Berikut adalah contoh dari implikasi pada dua proposisi:

P: Jika cuaca cerah, maka saya pergi bermain bola.

Q: Saya pergi bermain bola.

Maka implikasi dari P dan Q adalah "Jika cuaca cerah, maka saya pergi bermain bola" atau bisa ditulis sebagai P $\Rightarrow$ Q.

Berikut adalah tabel kebenaran dari implikasi:

p	q	p $\Rightarrow$ q
B	B	B
B	S	S
S	B	B
S	S	B

Dari tabel tersebut dapat dilihat bahwa implikasi akan bernilai benar jika proposisi awal benar dan proposisi akhir juga benar. Implikasi hanya akan bernilai salah jika proposisi awal benar dan proposisi akhir salah.

5. Biimplikasi

Implikasi adalah pernyataan majemuk dengan kata hubung “jika… maka…” Sehingga notasi dari “p $\Rightarrow$ q” dibaca “Jika p, maka q”.

Contoh:

Pernyataan 1: Jika hari ini hujan, maka saya akan membawa payung.

Pernyataan 2: Jika saya akan membawa payung, maka hari ini hujan.

Dalam hal ini, diimplikasi dapat dinyatakan sebagai berikut: "Saya akan membawa payung hari ini jika dan hanya jika hari ini hujan”.

Tabel kebenaran untuk biimplikasi adalah sebagai berikut:

p	q	p $\Leftrightarrow$ q
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	B

Dalam tabel kebenaran tersebut, p dan q masing-masing merepresentasikan nilai kebenaran dari dua pernyataan. Pada kolom ketiga, nilai kebenaran untuk biimplikasi ditentukan berdasarkan apakah nilai kebenaran dari kedua pernyataan sama atau tidak. Jika kedua pernyataan memiliki nilai kebenaran yang sama, maka hasilnya adalah benar, sedangkan jika nilai kebenarannya berbeda, maka hasilnya adalah salah.

Daftar Pustaka

Enderton, H. B. (2001). A mathematical introduction to logic (2nd ed.). San Diego: Academic Press.

Hafizhuddin, A. (2018). Logika Matematika. Jakarta: PT RajaGrafindo Persada

Musthofa, K. (2015). Logika Matematika untuk Pemula. Yogyakarta: Gava Media.

Sunaryono, D. (2010). Logika: Teori, Aplikasi, dan Penalaran. Yogyakarta: Penerbit ANDI

Profil Penulis

Suri Toding Lembang, M.Pd.

Lahir di Rantepao 18 September 1990. Pendidikan yang telah ditempuh, SDN Malango Rantepao 1996, SMPN 1 Toraja Utara 2002, SMA Negeri 2 Toraja Utara 2005. Lulus S1 di Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Kristen Indonesia Toraja (UKI Toraja) tahun 2012, kemudian melanjutkan pendidikan S2 di Universitas Negeri Makasar pada program studi pendidikan matematika. Saat ini sedang melanjutkan pendidikan S3 di Universitas Negeri Makasar pada Program studi pendidikan matematika. ktif menulis pada berbagai jurnal ilmiah baik nasional maupun internasional. Beberapa tulisan juga telah dimuat dalam Prosiding Internasional seperti *The Analysis Concept of Integers Counting Operations in Traditional Toraja Games Si Goal and Si Patte tahun 2021* dan *Identification Of Fractional Numbers In The Procedure For The Division Of Duku' Tedong At The Solo Sign' Event In Toraja Tahun 2022*. Penulis juga sering telag menulis buku berjudul Aljabar Linier Tahun 2019. Saat ini penulis aktif mengajar di Universitas Kristen Indonesia Toraja.

2

PENGANTAR LOGIKA 2

Evy Lalan Langi'
Universitas Kristen Indonesia Toraja

Berpikir adalah suatu kegiatan mental yang melibatkan kerja otak. Kegiatan berpikir juga melibatkan seluruh pribadi, perasaan, serta kehendak manusia. Berpikir merupakan proses dimana seseorang menelaah suatu hal. Dalam belajar matematika, berpikir dapat diartikan sebagai suatu proses mental yang melibatkan beberapa manipulasi pengetahuan yang diarahkan untuk menghasilkan ide, gagasan baru, maupun penyelesaian masalah matematika yang dapat diaplikasikan dalam kehidupan seseorang. Oleh karena itu, mempelajari matematika memberi kesempatan kepada individu untuk mengembangkan seluruh potensi berpikir dan bernalar.

Penalaran berarti menggunakan nalar atau berpikir logis. Berpikir logis adalah berpikir menurut pola tertentu yang masuk akal (Susanah, 2012). Seseorang yang berpikir untuk memutuskan tentang sesuatu belum tentu menggunakan kaidah logika, sebaliknya seseorang yang bernalar pastinya berpikir dengan menggunakan kaidah logika. Penalaran matematika terkait dengan beberapa kategori, yakni: kemampuan berpikir, mengkomunikasikan pikiran dan pendapat, memecahkan masalah, memvalidasi hasil pikiran, membentuk dugaan, membenarkan, dan membuat hubungan antara ide-ide matematika. Hal ini menjelaskan bahwa penalaran matematika berkaitan dengan hubungan antar beberapa ide matematika melalui suatu argumen logis. Penalaran dapat dibagi menjadi dua jenis, yaitu penalaran deduktif dan penalaran induktif. Penalaran deduktif menghasilkan kesimpulan yang pasti berdasarkan premis-premis yang diketahui, sedangkan penalaran induktif menghasilkan kesimpulan yang mungkin benar berdasarkan pengamatan atau fakta yang diperoleh.

Penalaran Deduksi

Membuktikan bahwa suatu pernyataan merupakan pernyataan yang benar (tautologi) adalah salah satu masalah pokok yang terus menerus digumuli dalam matematika. Logika matematika adalah bagian dari matematika yang mempelajari kaidah-kaidah penalaran yang sah (*valid*) untuk membuktikan kebenaran suatu bentuk pernyataan. Pembuktian kebenaran suatu pernyataan berlangsung dalam proses *penalaran deduksi*, berupa proses yang berpangkal dari suatu himpunan pernyataan-pernyataan yang disebut *premis*, dan berakhir dengan suatu pernyataan yang disebut *kesimpulan* (Susilo, 2012). Penalaran deduksi adalah proses penarikan kesimpulan logis dari beberapa premis atau asumsi yang dianggap benar atau diakui kebenarannya. Dalam penalaran deduksi, kesimpulan yang ditarik harus benar berdasarkan premis yang diberikan. Metode ini biasanya digunakan dalam matematika dan ilmu pengetahuan alam. Contoh penalaran deduksi dapat dilihat sebagai berikut.

Contoh 2.1.

Semua manusia adalah makhluk hidup. Seseorang adalah manusia. Oleh karena itu, orang tersebut adalah makhluk hidup. Penalaran ini menggunakan premis bahwa semua manusia adalah makhluk hidup dan seseorang adalah manusia, sehingga kesimpulannya adalah orang tersebut adalah makhluk hidup.

Contoh 2.2.

Jika hari ini hari Sabtu, maka besok adalah hari Minggu. Hari ini adalah hari Sabtu. Oleh karena itu, besok adalah hari Minggu. Penalaran ini menggunakan premis bahwa jika hari ini hari Sabtu, maka besok adalah hari Minggu dan hari ini adalah hari Sabtu, sehingga kesimpulannya adalah besok adalah hari Minggu.

Contoh 2.3.

Setiap anak yang bermain di taman akan merasa bahagia. Tom bermain di taman. Oleh karena itu, Tom merasa bahagia. Penalaran ini menggunakan premis bahwa setiap anak yang bermain di taman akan merasa bahagia dan Tom bermain di taman, sehingga kesimpulannya adalah Tom merasa bahagia.

Contoh 2.4.

Semua kucing memiliki bulu. Garfield adalah kucing. Oleh karena itu, Garfield memiliki bulu. Penalaran ini menggunakan premis bahwa semua kucing memiliki bulu dan Garfield adalah kucing, sehingga kesimpulannya adalah Garfield memiliki bulu.

Contoh 2.5.

Jika seseorang berbicara dengan sopan, maka orang tersebut akan mendapatkan penghargaan. John berbicara dengan sopan. Oleh karena itu, John akan mendapatkan penghargaan. Penalaran ini menggunakan premis bahwa jika seseorang berbicara dengan sopan, maka orang tersebut akan mendapatkan penghargaan dan John berbicara dengan sopan, sehingga kesimpulannya adalah John akan mendapatkan penghargaan.

Penalaran dediksi adalah suatu kerangka atau cara berfikir yang bertolak dari sebuah asumsi atau pernyataan yang bersifat umum untuk mencapai sebuah kesimpulan yang bermakna lebih khusus. Pola penarikan kesimpulan dalam metode deduksi merujuk pada pola berpikir yang disebut silogisme, yaitu bermula dari dua pernyataan atau lebih dengan sebuah kesimpulan. Kedua pernyataan tersebut sering disebut sebagai premis minor dan premis mayor, dan selalu diikuti oleh penyimpulan yang diperoleh melalui penalaran dari kedua premis tersebut. Kesimpulan diperoleh bernilai benar jika kedua premis dan cara yang digunakan juga benar, serta hasilnya juga menunjukkan koherensi data tersebut. Jadi penalaran deduksi yang sah tidak akan menghasilkan kesimpulan yang salah dari premis-premis yang benar. Penalaran deduksi yang sah (*valid*) disebut *kaidah inferensi.*

Prinsip dasar dari penalaran deduktif adalah bahwa kesimpulan atau *konklusi* yang ditarik harus benar berdasarkan pada premis yang benar pula. Hal ini tergantung pada kebenaran premis-premis tersebut, sehingga dapat dikatakan bahwa penalaran deduktif bergantung pada kebenaran informasi yang diberikan. Apabila premisnya salah, maka kesimpulannya juga salah. Dalam matematika, penalaran deduksi sering digunakan untuk membuktikan teorema-teorema dan menghasilkan hasil yang pasti dan benar. Berikut ini adalah beberapa contoh penalaran deduksi dalam matematika:

Contoh 2.6. Penjumlahan dua bilangan positif

Premis 1	:	Jumlah dua bilangan bulat positif adalah selalu bilangan bulat positif.
Premis 2	:	Angka 5 dan 3 adalah bilangan bulat positif.

Kesimpulan : Jumlah angka 5 dan 3 adalah bilangan bulat positif.

Contoh 2.7. Teorema Pythagoras: Dalam segitiga siku-siku, kuadrat dari panjang sisi miring sama dengan jumlah kuadrat dari panjang sisi-sisi lainnya.

Premis 1 : Dalam segitiga siku-siku ABC, AB dan AC adalah kedua sisi segitiga yang membentuk sudut siku-siku.

Premis 2 : BC adalah sisi miring dari segitiga siku-siku ABC.

Kesimpulan : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

Contoh 2.8. Sifat-sifat sudut pada lingkaran: Sudut di pusat adalah dua kali sudut yang diukur pada busur lingkaran yang sama.

Premis 1 : Lingkaran dengan pusat O.

Premis 2 : Sudut BOC adalah sudut di pusat lingkaran O.

Premis 3 : Busur BC adalah busur lingkaran yang sama dengan sudut BOC.

Kesimpulan : Sudut $BOC = 2$ x sudut BAC.

Contoh 2.9. Sifat-sifat bilangan prima: Setiap bilangan bulat yang lebih besar dari 1 dapat diekspresikan sebagai produk dari faktor-faktor prima yang unik.

Premis 1 : Bilangan 27.

Premis 2 : Faktor-faktor prima dari 27 adalah $3 \times 3 \times 3$.

Kesimpulan : Bilangan 27 dapat diekspresikan sebagai produk dari faktor-faktor prima yang unik.

Contoh 2.10. Teorema Euclid tentang bilangan prima: Ada banyak bilangan prima.

Premis 1 : Asumsikan bahwa hanya ada sejumlah terbatas bilangan prima.

Premis 2 : Produk dari semua bilangan prima yang ada ditambahkan satu.

Kesimpulan : Ada bilangan prima lain yang tidak termasuk dalam jumlah bilangan prima sebelumnya.

Contoh 2.11. Sifat-sifat segitiga sama kaki: Dalam segitiga sama kaki, garis tengah pada dasar segitiga sama panjang dengan setengah dari sisi segitiga.

Premis 1	:	Segitiga sama kaki ABC dengan $AB = AC$.
Premis 2	:	AD adalah garis tengah pada dasar segitiga BC.
Kesimpulan	:	$AD = BC/2$.

Penalaran deduksi dalam matematika sangat berguna untuk membuktikan teorema-teorema dan menghasilkan hasil yang pasti dan benar. Dengan menggunakan premis-premis yang akurat dan logis, penalaran deduksi dapat membantu menghindari kesalahan dan kesimpulan yang salah.

Penalaran Induksi

Penalaran induksi adalah proses penarikan kesimpulan umum dari fakta-fakta atau data yang diperoleh melalui pengamatan atau pengalaman. Mustofa (2016) mengungkapkan bahwa pada prinsipnya, penalaran induksi merupakan proses berpikir dengan menggunakan pengetahuan dari contoh khusus (yang diketahui) agar dapat menarik kesimpulan mengenai contoh umum (tidak diketahui). Dalam penalaran induksi, kesimpulan tidak dapat dianggap benar dengan pasti, tetapi hanya mungkin benar dengan probabilitas tertentu. Berikut ini adalah beberapa contoh penalaran deduksi.

Contoh 2.12.

Semua kucing yang pernah saya temui memiliki kumis. Oleh karena itu, semua kucing memiliki kumis. Penalaran ini didasarkan pada pengalaman pribadi, yaitu bahwa semua kucing yang pernah ditemui memiliki kumis. Namun, kesimpulan ini tidak selalu benar, karena mungkin ada beberapa kucing yang tidak memiliki kumis.

Contoh 2.13.

Setiap kali saya pergi ke restoran A, makanannya selalu enak. Oleh karena itu, restoran A pasti selalu menyajikan makanan yang enak. Penalaran ini didasarkan pada pengalaman pribadi yang spesifik, yaitu bahwa setiap kali pergi ke restoran A, makanannya selalu enak. Namun, kesimpulan ini juga tidak selalu benar, karena ada kemungkinan bahwa restoran A memiliki hari yang buruk dalam menyajikan makanan.

Contoh 2.14.

Semua manusia membutuhkan air untuk bertahan hidup. Oleh karena itu, semua makhluk hidup membutuhkan air untuk bertahan hidup. Penalaran ini didasarkan pada fakta bahwa manusia merupakan makhluk hidup dan membutuhkan air untuk bertahan hidup. Namun, kesimpulan ini tidak selalu benar, karena ada beberapa makhluk hidup yang tidak membutuhkan air untuk bertahan hidup.

Contoh 2.15

Setiap kali saya memasak ayam dengan resep ini, rasanya selalu enak. Oleh karena itu, jika saya memasak ayam dengan resep yang sama di masa depan, rasanya akan selalu enak. Penalaran ini didasarkan pada pengalaman pribadi yang spesifik, yaitu bahwa setiap kali memasak ayam dengan resep yang sama, rasanya selalu enak. Namun, kesimpulan ini juga tidak selalu benar, karena mungkin ada faktor lain seperti bahan yang digunakan atau cara memasak yang berbeda.

Contoh 2.16.

Semua bunga yang saya lihat di taman ini berwarna merah. Oleh karena itu, semua bunga di taman ini berwarna merah. Penalaran ini didasarkan pada pengamatan spesifik, yaitu bahwa semua bunga yang dilihat di taman ini berwarna merah. Namun, kesimpulan ini tidak selalu benar, karena mungkin ada bunga yang berbeda warna di tempat lain di taman.

Dalam kesimpulannya, penalaran induksi didasarkan pada pengalaman pribadi atau pengamatan spesifik, dan kesimpulannya hanya berdasarkan probabilitas atau kemungkinan. Oleh karena itu, kesimpulan dari penalaran induksi tidak selalu benar secara pasti dan harus selalu diperiksa kembali dengan menggunakan metode penalaran yang lain.

Penalaran induktif memiliki beberapa karakteristik, yaitu:

1. Bergantung pada data

   Penalaran induktif bergantung pada data atau fakta yang tersedia. Data atau fakta tersebut digunakan untuk menghasilkan kesimpulan atau asumsi yang lebih umum.

2. Menggunakan generalisasi

   Penalaran induktif menggunakan generalisasi untuk menghasilkan kesimpulan yang lebih umum dari sejumlah fakta atau data yang ada. Generalisasi ini dapat bersifat umum atau khusus, dan dapat digunakan untuk membuat kesimpulan yang lebih luas atau spesifik.

3. Tidak pasti atau mutlak benar

   Kesimpulan yang dihasilkan dari penalaran induktif tidak selalu pasti atau mutlak benar, melainkan hanya memiliki kemungkinan yang tinggi untuk benar. Kesimpulan tersebut bergantung pada data atau fakta yang tersedia, dan dapat berubah jika ada data atau fakta baru yang ditemukan.

4. Memiliki tingkat keyakinan yang berbeda-beda

   Tingkat keyakinan pada kesimpulan yang dihasilkan dari penalaran induktif dapat berbeda-beda. Ada kesimpulan yang memiliki tingkat keyakinan yang tinggi, dan ada kesimpulan yang memiliki tingkat keyakinan yang rendah.

5. Bersifat empiris

   Penalaran induktif bersifat empiris, karena bergantung pada data atau fakta yang diperoleh dari pengamatan atau pengalaman. Data atau fakta tersebut digunakan untuk membuat generalis

Ciri khas dari penalaran induktif adalah generalisasi. Generalisasi dapat dilakukan dengan dua metode yang berbeda yakni *induksi lengkap* dan *induksi tidak lengkap*. Induksi lengkap adalah generalisasi yang dilakukan dengan diawali hal-hal partikular yang mencakup keseluruhan jumlah dari suatu peristiwa yang diteliti. Sebagai contoh dalam kasus penelitian bahwa di depan setiap rumah di desa ada pohon mangga, kemudian digeneralisasikan dengan pernyataan umum "Setiap rumah di desa memiliki pohon mangga". Generalisasi seperti ini tidak bisa diperdebatkan dan tidak pula ragukan.

Penalaran induksi lengkap adalah metode penalaran induktif yang digunakan untuk membuktikan suatu pernyataan matematis yang bersifat universal dengan cara menunjukkan bahwa pernyataan tersebut benar untuk kasus dasar, dan kemudian menunjukkan bahwa jika pernyataan tersebut benar untuk suatu nilai k, maka pernyataan tersebut juga benar untuk nilai $k + 1$. Berikut adalah contoh penalaran induksi lengkap.

Contoh 2.17.

Pernyataan : Untuk setiap bilangan bulat positif n, maka $1 + 2 + 3 + \ldots + n = n(n + 1)/2$.

Langkah 1 : Kasus Dasar

Untuk $n = 1$, pernyataan tersebut benar karena $1 = 1(1 + 1)/2$.

Langkah 2 : Hipotesis Induksi

Anggap pernyataan tersebut benar untuk suatu bilangan bulat positif k, yaitu $1 + 2 + 3 + \ldots + k = k(k + 1)/2$.

Langkah 3 : Bukti Induksi

Kita harus menunjukkan bahwa pernyataan tersebut juga benar untuk bilangan bulat positif $k + 1$, yaitu $1 + 2 + 3 + \ldots + (k + 1) = (k + 1)((k + 1) + 1)/2$.

Kita mulai dari pernyataan induksi yang telah kita asumsikan benar pada langkah 2:

$1 + 2 + 3 + \ldots + k = k(k + 1)/2$

Tambahkan $k + 1$ ke kedua sisi persamaan tersebut:

$$
\begin{aligned}
1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k + 1) &= k(k + 1)/2 + (k + 1) \\
&= (k^2 + k)/2 + (k + 1) \\
&= (k^2 + k + 2k + 2)/2 \\
&= (k^2 + 3k + 2)/2 \\
&= (k + 1)(k + 2)/2
\end{aligned}
$$

Sehingga, kita telah membuktikan bahwa jika pernyataan tersebut benar untuk suatu bilangan bulat positif k, maka pernyataan tersebut juga benar untuk nilai $k + 1$. Oleh karena itu, pernyataan tersebut benar secara universal untuk setiap bilangan bulat positif n.

Penalaran induksi lengkap sangat berguna dalam matematika, terutama dalam pembuktian pernyataan yang bersifat universal. Dengan menggunakan metode ini, kita dapat membuktikan suatu pernyataan secara sistematis dan dapat diterima secara logis.

Dalam penalaran induksi atau penelitian ilmiah sering kali tidak memungkinkan menerapkan induksi lengkap, oleh karena itu yang lazim digunakan adalah induksi yang tidak lengkap. Induksi yang dilakukan dengan hanya sebagian hal partikular atau bahkan dengan hanya sebuah hal khusus. Induksi inilah yang biasa disebut dengan *induksi tidak lengkap*. Induksi lengkap dicapai manakala seluruh kejadian atau premis awalnya telah diteliti dan diamati secara mendalam. Jika tidak semua premis itu diamati dengan teliti atau ada yang terlewatkan dan terlanjur sudah diambil suatu kesimpulan umum, maka diperolehlah induksi tidak lengkap. Bahkan manakala seseorang seusai mengamati hal-hal partikular kemudian mengeneralisasikannya, maka sadar atau tidak, ia telah menggunakan induksi. Generalisasi di sini mungkin benar mungkin pula salah, namun yang lebih perlu dicermati adalah agar tidak terjadi sebuah kecerobohan generalisasi. Berikut adalah contoh penalaran induksi yang tidak lengkap.

Contoh 2.18.

Pernyataan	Untuk setiap bilangan bulat positif n, maka $3^n > n^2$.
Langkah 1	Kasus Dasar Untuk $n = 1$, pernyataan tersebut benar karena $3^1 > 1^2$
Langkah 2	Hipotesis Induksi Anggap pernyataan tersebut benar untuk suatu bilangan bulat positif k, yaitu $3^k > k^2$
Langkah 3	Bukti Induksi

Kita harus menunjukkan bahwa pernyataan tersebut juga benar untuk bilangan bulat positif $k + 1$, yaitu $3^{(k+1)} > (k + 1)^2$.

Kita mulai dengan mengalikan kedua sisi persamaan pada hipotesis induksi dengan 3:

$$3^{(k+1)} > 3k^2$$

Kita juga bisa mengalikan kedua sisi persamaan pada pernyataan tersebut dengan 3:

$$3^{(k+1)} > 3k^2 + 6k + 3$$

Kita perhatikan bahwa $k^2 < (k + 1)^2$, dan $k^2 < k(k + 1)$. Oleh karena itu, kita dapat menyimpulkan bahwa:

$$3k^2 + 6k + 3 < 3(k + 1)^2$$

Sehingga, kita dapat menyimpulkan bahwa:

$$3^{(k+1)} > 3k^2 + 6k + 3 > 3(k + 1)^2$$

Namun, pada tahap ini, kita tidak dapat membuktikan bahwa pernyataan tersebut benar untuk kasus $k = 2$, karena $3^2 = 9 < 2^2 = 4$.

Oleh karena itu, penalaran induksi tersebut tidak lengkap dan tidak dapat diterima secara logis.

Dalam penalaran induksi, penting untuk membuktikan pernyataan induksi untuk semua kasus, termasuk kasus dasar dan kasus umum. Jika tidak, maka penalaran tersebut tidak lengkap dan tidak dapat diterima secara logis.

Penerapan Logika Dasar dalam Kehidupan Sehari-hari

Logika dasar adalah cabang ilmu logika yang mempelajari prinsip-prinsip dasar penalaran yang digunakan dalam kehidupan sehari-hari. Logika dasar terdiri dari beberapa konsep dasar, seperti proposisi, argumen, dan silogisme.

Proposisi adalah pernyataan atau kalimat yang dapat dianggap benar atau salah. Contoh proposisi adalah "Hari ini adalah hari Senin", "jumlah segi empat sama dengan empat", atau "air dapat mengalir". Proposisi yang benar biasanya diwakili oleh simbol "T" atau "1", sedangkan proposisi yang salah diwakili oleh simbol "F" atau "0".

Argumen adalah serangkaian proposisi yang digunakan untuk membuktikan atau menolak suatu pernyataan atau kesimpulan. Argumen terdiri dari premis dan kesimpulan. Premis adalah proposisi yang digunakan sebagai dasar atau alasan, sedangkan kesimpulan adalah proposisi yang dihasilkan dari premis-premis tersebut. Contoh argument: Semua manusia adalah makhluk hidup. Seseorang adalah manusia. Oleh karena itu, orang tersebut adalah makhluk hidup.

Silogisme adalah bentuk argumen yang terdiri dari tiga proposisi, yaitu dua premis dan satu kesimpulan. Silogisme biasanya digunakan dalam logika deduktif untuk membuktikan kesimpulan yang pasti. Contoh silogisme: Semua manusia adalah makhluk hidup. Seseorang adalah manusia. Oleh karena itu, orang tersebut adalah makhluk hidup.

Hukum logika adalah prinsip-prinsip dasar yang digunakan dalam logika dasar. Hukum logika terdiri dari tiga prinsip utama, yaitu hukum identitas, hukum non kontradiksi, dan hukum eksklusi tengah. Hukum identitas menyatakan bahwa suatu proposisi selalu sama dengan dirinya sendiri. Hukum non kontradiksi menyatakan bahwa suatu proposisi tidak dapat benar dan salah secara bersamaan. Hukum eksklusi tengah menyatakan bahwa setiap proposisi harus benar atau salah, tidak ada pilihan lain.

Dalam kehidupan sehari-hari, logika dasar sering digunakan untuk membantu memecahkan masalah atau membuat keputusan yang logis.

Logika dasar memiliki banyak penerapan dalam kehidupan sehari-hari, baik dalam situasi pribadi maupun profesional. Dengan memahami konsep dasar logika, seseorang dapat mengenali argumen yang salah atau tidak valid dan membuat kesimpulan yang lebih akurat dan benar. Berikut adalah beberapa contoh penerapan logika dasar dalam kehidupan sehari-hari:

1. Pengambilan keputusan

   Penerapan logika dasar sangat penting dalam pengambilan keputusan yang rasional dan tepat. Dalam hal ini, seseorang harus mengidentifikasi proposisi dan argumen yang terkait dengan masalah yang dihadapi. Kemudian, seseorang harus menganalisis dan mengevaluasi argumen tersebut untuk membuat keputusan yang tepat.

2. Penyelesaian konflik

   Dalam situasi konflik, logika dasar dapat membantu seseorang untuk menganalisis argumen yang saling bertentangan dan mencari solusi yang tepat. Dengan memahami hukum logika, seseorang dapat mengevaluasi argumen yang berlawanan dan mengidentifikasi kesalahan yang terjadi dalam argumen tersebut.

3. Pemecahan masalah

   Dalam memecahkan masalah, logika dasar dapat membantu seseorang untuk mengidentifikasi proposisi dan argumen yang relevan dengan masalah tersebut. Dengan memahami hukum logika, seseorang dapat mengidentifikasi kesalahan dalam argumen dan mencari solusi yang tepat untuk masalah yang dihadapi.

4. Komunikasi efektif

   Logika dasar juga penting dalam komunikasi efektif, terutama dalam argumen atau debat. Dengan memahami prinsip-prinsip dasar logika, seseorang dapat mengidentifikasi argumen yang valid dan mempertahankan pendapatnya dengan cara yang logis dan jelas.

5. Pengembangan kemampuan kritis

   Penerapan logika dasar dalam kehidupan sehari-hari dapat membantu seseorang untuk mengembangkan kemampuan kritis. Dengan memahami prinsip-prinsip logika, seseorang dapat mengidentifikasi kesalahan dalam argumen, mengevaluasi argumen secara kritis, dan membuat kesimpulan yang tepat.

Dalam kesimpulannya, penerapan logika dasar sangat penting dalam kehidupan sehari-hari untuk membantu seseorang dalam pengambilan keputusan, penyelesaian konflik, pemecahan masalah, komunikasi efektif, dan pengembangan kemampuan kritis. Dengan memahami prinsip-prinsip dasar logika, seseorang dapat mengambil keputusan yang tepat, memecahkan masalah dengan lebih efektif, dan berkomunikasi dengan lebih jelas dan logis.

Daftar Pustaka

Mustofa, Imron. (2016). Jendela logika dalam berfikir: Deduksi dan induksi sebagai dasar penalaran ilmiah. *El-banat: Jurnal Pemikiran dan Pendidikan Islam*, *6*(2), 122 – 142.

Putri, D. K, Sulianto, J., & Azizah, M. (2019). Kemampuan penalaran matematis ditinjau dari kemampuan pemecahan masalah. *International Journal of Elementary Education*, *3*(3), 351– 357.

Susanah. (2022). Profil penalaran siswa SMA dalam menyelesaikan soal AKM literasi numerasi ditinjau dari perbedaan jenis kelamin. *Pi: Mathematics Education Journal*, *5*(2), 72 – 83.

Susilo, Frans. (2012). *Landasan Matematika.* Yogyakarta: Graha Ilmu

Profil Penulis

Dr. Evy Lalan Langi', M.Pd.

Penulis memiliki ketertarikan terhadap dunia Pendidikan khususnya bidang Matematika sejak berada di bangku sekolah. Hal tersebut membuat penulis memilih untuk kuliah S1 pada program studi Pendidikan Matematika di Universitas Kristen Indonesia Toraja dan selesai pada tahun 2012. Setahun kemudian, penulis melanjutkan Pendidikan S2 dengan jurusan yang sama pada Program Pascasarjana Universitas Negeri Makassar. Karena kecintaan yang begitu luar biasa terhadap Pendidikan Matematika, penulis kembali melanjutkan studi ke jenjang S3 pada Program Pascasarjana Universitas Negeri Surabaya dan berhasil lulus pada tahun 2022. Sejak tahun 2012 hingga sekarang, penulis tercatat sebagai dosen pada Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Kristen Indonesia Toraja. Penulis aktif pada kegiatan-kegiatan ilmiah dan tetap aktif sebagai peneliti di bidang Pendidikan khususnya Pendidikan Matematika.

Email Penulis: evylalanlangi@gmail.com

3

LOGIKA PROPOSISI DASAR 1

Rafika Sari
Universitas Bhayangkara Jakarta

Definisi Proposisi (*Propositions*)

Proposisi (pernyataan) adalah komponen dasar pembentuk kalimat logika (*sentence*) dalam logika proposional. Adapun kalimat yang dibentuk dari proposisi disebut kalimat deklaratif, yaitu kalimat yang dapat ditentukan nilai kebenarannya, benar (*true)* atau salah (*false*), tetapi tidak keduanya sekaligus.

Pada bab ini akan disajikan suatu bahasa kalimat abstrak yang disebut logika proposional (*proposition logic*), serta akan diberikan aturan-aturan apakah kalimat tersebut bernilai valid atau tidak. Logika proposional adalah logika dasar pada pemrograman yang harus dipahami oleh para programmer, karena logika dasar inilah yang menjadi dasar penentuan nilai kebenaran dari suatu pernyataan, yaitu benar (*true)* atau salah (*false*) pada pengujian kondisi dalam pemrograman.

Beberapa pernyataan (*statement*) dapat langsung diterima kebenarannya tanpa harus diketahui kebenaran pembentuk-pembentuknya, seperti pernyataan berikut:

"Kalimantan memiliki jumlah penduduk banyak dibanding Sumatera atau Kaimantan memiliki jumlah penduduk lebih sedikit dibanding Sumatera".

Kalimat di atas langsung dapat diterima kebenarannya tanpa harus ada orang yang datang ke Kalimantan dan Sumatera untuk membuktikan apakah jumlah penduduk di Kalimantan memang lebih banyak dari Sumatera, atau sebaliknya. Kalimat tersebut merupakan contoh dari kalimat abstrak $\boldsymbol{p\ or\ (not\ p)}$, dengan $\boldsymbol{p}$ adalah suatu proposisi. Kalimat abstrak adalah "valid" jika bernilai benar tanpa perlu memperdulikan kebenaran atau kesalahan dari proposisi-proposisi penyusunnya. Contoh lain dari kalimat yang juga “valid” adalah $not\ (\boldsymbol{p\ and}\ (\boldsymbol{not\ p}))\ \boldsymbol{or\ q},$ dengan $\boldsymbol{p}$ adalah suatu proposisi pertama dan $\boldsymbol{q}$ adalah suatu proposisi kedua.

Definisi Kalimat (*Sentences*)

Kata merupakan rangkaian huruf yang mengandung arti, sedangkan kalimat adalah kumpulan kata yang disusun menurut aturan tata bahasa dan mengandung arti. Di dalam matematika tidak semua pernyataan yang bernilai benar atau salah saja yang digunakan dalam penalaran. Pernyataan disebut juga kalimat deklaratif yaitu kalimat yang bersifat menerangkan dan selanjutnya disebut *proposisi* (Rinaldi Munir, 2016; Suraya, 2019). Jadi, Pernyataan atau Kalimat Deklaratif atau Proposisi adalah kalimat yang bernilai benar atau salah tetapi tidak keduanya.

Proposisi (pernyataan) dalam kalimat logika dinyatakan dengan simbol-simbol proposisi, sebagai berikut:

- Simbol atau nilai kebenaran (*truth value*) yaitu benar (*true*) dan salah (*false*)
- Simbol-simbol proposional (*propotional symbols*) yaitu huruf-huruf $\boldsymbol{p, q, r, s, t}$.

Berikut ini adalah beberapa contoh proposisi (pernyataan) (Suraya, 2019):

- Padang adalah ibukota Negara Kesatuan Republik Indonesia
- Jumlah penduduk Malaysia lebih banyak dari jumlah penduduk Indonesia
- Indonesia mengalami 7 kali pergantian presiden
- 3 adalah bilangan prima yang pertama
- 15 habis dibagi dengan 3

Kalimat-kalimat di atas adalah kalimat deklaratif karena dapat diketahui nilai kebenarannya (*truth value*), yaitu benar atau salah. Kalimat contoh “Padang adalah ibukota Negara Kesatuan Republik Indonesia” bernilai salah (*false*) karena ibukota Negara Kesatuan Republik Indonesia adalah DKI Jakarta.

Sebaliknya, kalimat yang tidak dapat ditentukan nilai kebenarannya, baik benar maupun salah, disebut kalimat terbuka (bukan proposisi).

Sebagai perbandingan, berikut adalah contoh kalimat terbuka (Suraya, 2019):

- Apakah hari ini ada ujian?
- $x + 3 > 7$
- Ali habis dibagi dengan 5
- Angka 10 dan angka 100 sudah saling menyayangi
- Husein sangat mencintai angka 9

Kalimat-kalimat dalam logika proposisional dibangun dari proposisi-proposisi

dengan menerapkan *propositional connectives*:

not, and, or, if-then, if-and-only-if, if-then-else

Kalimat dibentuk menurut aturan-aturan (*rules)* berikut: (Suraya, 2019)

- Setiap proposisi, yaitu suatu simbol kebenaran atau suatu simbol proposisi merupakan kalimat.
- Apabila F kalimat, maka demikian juga negasinya (*negation*) (*not F*).
- Apabila F dan G kalimat, maka demikian juga konjungsinya (*conjunction*), yaitu (*F and G*), selanjutnya F maupun G disebut *conjuncts* dan (*F and G*).
- Apabila F dan G kalimat, maka demikian juga disjungsinya (*disjunction*), yaitu *(F or* selanjutnya F maupun G disebut *disjuncts* dan (*F or G*)).
- Apabila F dan G kalimat, maka demikian juga implikasinya (*implication*), yaitu (*if F then G*). Selanjutnya F disebut antecedent dan G disebut *consequent* dan (*if F then G*). Kalimat (*if G then F*) disebut *converse* dan kalimat (*if F then G*).
- Apabila F dan G kalimat, maka demikian juga ekuivalensinya (*equivalence*), yaitu (*F if and onfy if G*), selanjutnya F disebut sisi-kiri (*left-hand side*) dan G disebut sisi-kanan (*right-hand side*) dan (*F if and only if G*).
- Apabila F, G dan H kalimat, maka demikian juga kondisionalnya (*conditional*), yaitu (*if F then G else H*). Selanjutnya F, G, dan H masing-masing disebut klausa-if (*if clause*), klausa-then (*then-*

cause), dan klausa-else (*else-clause*) dan kondisional (*if F then G else H*).

Contoh Kalimat:

Ekspresi ***E***: ***((not(P or Q)) if and onfy if ((not P) and (not Q)))*** merupakan kalimat, karena ***P*** dan ***Q*** keduanya merupakan kalimat, jadi ***(P or (not P))***, dan (*not Q*) merupakan kalimat, sehingga ***(not (P or Q)) and ((not P) and (not Q))*** merupakan kalimat, jadi ekspresi ***E***, ***((not (P or Q) if and onfy if ((not P) and (not Q))***, merupakan kalimat.

Notasi (*Natation*)

Seringkali, beberapa kalimat perlu digabungkan untuk menjadi kalimat yang lebih panjang. Misalnya kalimat "8 adalah bilangan genap dan 9 habis di bagi 3", merupakan gabungan dari kalimat "8 adalah bilangan genap" dan kalimat "9 habis di bagi 3".

Dalam logika proposisional dikenal 6 macam penghubung (connective), yaitu ***not, and, or, if-then, if-and-only-if, serta if-then-else.*** Tabel 1 berisi notasi dari penghubung pada logika proposisional (Setiadi Rachmat, 2004; Suraya, 2019).

Tabel 1. notasi dari penghubung pada logika proposisional

Simbol	**Pengertian**	**Bentuk**
¬ , ~	Tidak/*Not/Negasi*	Tidak............
∧	Dan/*And/Konjungsi*	........dan........
∨	Atau/*Or/Disjungsi*	.........atau.......
→	*Implikasi/if-then*	Jika.......maka.......
↔	*Bi-Implikasi*/*if-and-only-if*	...bila dan hanya bila...
tidak ada	*if-then-else*	Jika...maka...yang lain...

Contoh penulisan dengan notasi konvensional dari kalimat:

(if ((p or q) and (if q then r)) then (if (p and q) then (not))

***a**dalah:*

$$((p \vee q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \wedge q) \rightarrow \neg r)$$

Interpretasi (*Interpretation*)

Interpretasi adalah pemberian (*assignment*) nilai kebenaran (benar atau salah) pada setiap simbol proposisi dari suatu kalimat logika (Suraya, 2019). Sebagai contoh, perhatikan kalimat:

not p or q

Salah satu interpretasi untuk kalimat di atas member nilai salah ke ***p*** dan nilai benar ke ***q***. Interpretasi terhadap nilai ***p*** dan ***q*** dapat ditulis:

$p \leftarrow$ salah

$q \leftarrow$ benar

Semua kemunculan dari suatu simbol proposional dalam kalimat logika akan diberi nilai sama oleh suatu interpretasi yang diberikan, sebagai contoh kalimat:

not p and (not q) or p

dua kemunculan ***p*** masing-masing akan diberi nilai sama. Demikian juga kemunculan terhadap proposisi ***q***.

Aturan Semantik (*Semantic Rule*)

Aturan semantik adalah suatu aturan yang digunakan untuk menentukan arti suatu kalimat logika atau nilai kebenaran (*truth value*) dari suatu kalimat *(sentence*). Berikut adalah aturan-aturan semantik untuk kalimat logika: (Rinaldi Munir, 2016; Setiadi Rachmat, 2004; Suraya, 2019)

1. *Negation Rule* (aturan NOT)

Jika ***p*** adalah "Padang ibukota Sumatra Barat", maka ingkaran atau negasi dari pernyataan ***p*** tersebut adalah **~*p*** yaitu "Padang bukan ibukota Sumatra Barat" atau "Tidak benar bahwa Padang ibukota Sumatra Barat". Jika ***p*** diatas bernilai benar (*true*), maka ingkaran ***p*** (~***p***) adalah bernilai salah (*false*) dan begitu juga sebaliknya.

p	$\sim p$
Benar	Salah
Salah	Benar

2. ***Conjunction Rule* (aturan AND)**

   Konjungsi adalah suatu pernyataan majemuk yang menggunakan penghubung "DAN/AND" dengan notasi "∧"

   Contoh:

   p: Fatimah makan nasi

   q: Fatimah minum air mineral

   Maka $p \land q$: Fahmi makan nasi dan minum air mineral

   Pada konjungsi $p \land q$ akan bernilai benar jika baik ***p*** maupun ***q*** bernilai benar. Jika salah satunya (atau keduanya) bernilai salah maka $p \land q$ bernilai salah.

p	q	$p \land q$
Benar	Benar	Benar
Benar	Salah	Salah
Salah	Benar	Salah
Salah	Salah	Salah

disingkat →

p	q	$p \land q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	S

   Konjungsi bernilai benar (B) apabila kedua proposisi penyusunnya bernilai benar (B). Apabila salah satu proposisi penyusunnya bernilai salah, atau bahkan keduanya bernilai salah (S), maka konjungsi bernilai salah (S).

3. ***Disjunction Rule* (aturan OR)**

   Disjungsi adalah pernyataan majemuk yang menggunakan penghubung "ATAU/OR" dengan notasi "∨". Kalimat disjungsi terbagi menjadi dua jenis yaitu:

   a) *Inclusive Disjunction* (OR/Atau)

      Yaitu jika ***p*** benar atau ***q*** benar atau keduanya ***p*** dan ***q*** bernilai benar.

p: 3 adalah bilangan prima

q: 3 adalah bilangan ganjil

p ∨ **q** : 3 adalah bilangan prima atau ganjil

Benar bahwa 3 bisa dikatakan bilangan prima sekaligus bilangan ganjil.

p	***q***	***p*** ∨ **q**
B	B	B
B	S	B
S	B	B
S	S	S

Disjunction bernilai salah (S) apabila kedua proposisi penyusunnya bernilai salah (S). Apabila salah satu proposisi penyusunnya bernilai benar, atau bahkan keduanya bernilai benar (B), maka disjungsi bernilai benar (B).

b) *Exclusive Disjunction* (XOR/Atau)

Menggabungkan dua proposisi untuk membentuk logika "*exclusive or*'. Perhatikan bahwa ***p*⊕*q*** berarti ***p*** benar, atau ***q*** benar tapi tidak dua-duanya benar. Disebut *exclusive*-*or*, karena tidak memungkinkan ***p*** dan ***q*** keduanya benar.

p	***q***	***p*⊕*q***
B	B	S
B	S	B
S	B	B
S	S	S

Dari aturan disjungsi dan konjungsi tersebut maka munculah sifat-sifat aljabar logika sebagai berikut: (Rinaldi Munir, 2016; Setiadi Rachmat, 2004; Suraya, 2019)

1.	Hukum Idempoten $\boldsymbol{p} \vee \mathbf{q} \Leftrightarrow \boldsymbol{p}$ $\boldsymbol{p} \wedge \mathbf{q} \Leftrightarrow \boldsymbol{p}$	5.	Hokum Identitas $\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{salah} \Leftrightarrow \boldsymbol{p}$ $\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{benar} \Leftrightarrow \boldsymbol{p}$ $\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{benar} \Leftrightarrow \boldsymbol{benar}$ $\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{salah} \Leftrightarrow \boldsymbol{salah}$
2.	Hukum Komutatif $\boldsymbol{p} \vee \mathbf{q} \Leftrightarrow \mathbf{q} \vee \boldsymbol{p}$ $\boldsymbol{p} \wedge \mathbf{q} \Leftrightarrow \mathbf{q} \wedge \boldsymbol{p}$	6.	Hokum Komplemen $\boldsymbol{p} \vee \sim\boldsymbol{p} \Leftrightarrow \boldsymbol{benar}$ $\backsim (\backsim \boldsymbol{p}) \Leftrightarrow \boldsymbol{p}$
3.	Hokum Asosiatif $(\boldsymbol{p} \vee \mathbf{q}) \vee \boldsymbol{r} \Leftrightarrow \boldsymbol{p} \vee (\boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{r})$ $(\boldsymbol{p} \wedge \mathbf{q}) \wedge \boldsymbol{r} \Leftrightarrow \boldsymbol{p} \wedge (\boldsymbol{q} \wedge \boldsymbol{r})$	7.	Hokum De Morgan Hokum ini merupakan negasi dari konjungsi dan disjungsi, yaitu: $\backsim (\boldsymbol{p} \wedge \mathbf{q}) \Leftrightarrow \backsim \boldsymbol{p} \vee \backsim q$ $\backsim (\boldsymbol{p} \vee \mathbf{q}) \Leftrightarrow \backsim \boldsymbol{p} \wedge \backsim q$
4.	Hukum Distribusif $\boldsymbol{p} \vee (\mathbf{q} \wedge \mathbf{r}) \Leftrightarrow (\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}) \wedge (\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{r})$ $\boldsymbol{p} \wedge (\mathbf{q} \vee \mathbf{r}) \Leftrightarrow (\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}) \vee (\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{r})$		

4. *Implication Rule* (aturan IF-THEN)

Implikasi adalah pernyataan majemuk yang berupa rangkaian dari dua pernyataan yang di hubungkan dengan kata penghubung "jika...,maka...". Pada implikasi dua penyataan $\boldsymbol{p}$ dan $\boldsymbol{q}$ ditulis $\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}$ (dibaca: jika $\boldsymbol{p}$, maka $\boldsymbol{q}$). Pernyataan $\boldsymbol{p}$ disebut *anteseden* dan pernyataan q disebut *konsekuen*. Sebuah kalimat implikasi $\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}$ bernilai salah hanya jika p (*antesenden*) bernilai "benar" dan $\boldsymbol{q}$ (*konsekuen*) bernilai "salah", selain itu implikasi bernilai "benar". Berikut ditampilkan tabel kebenaran dari implikasi:

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}$
B	B	B
B	S	S
S	B	B
S	S	B

Contoh:

a) ***p*** = Rita lulus ujian nasional

q = ayah akan membelikan mobil baru

Berikut kejadian yang mungkin terjadi pada kasus di atas:

1. Apabila ***p*** benar dan ***q*** benar berarti Rita lulus ujian kemudian ayah membelikan mobil. Apakah Rita senang? Tentu ia. Berarti nilai "jika ***p*** maka ***q***" **benar (*true*)**

2. Apabila ***p*** benar dan ***q*** salah berarti Rita lulus ujian kemudian ayah tidak membelikan mobil baru. Apakah rita senang? Tentunya tidak. Rita pastinya akan protes dan minta janji ayah untuk membelikan mobil. Protes yang dilakukan menandakan nilai "jika ***p*** maka ***q***" bernilai **salah (*false*)**

3. Apabila ***p*** salah dan ***q*** benar berarti Rita tidak lulus ujian kemudian ayah membelikan mobil. Apakah Rita senang? Tentunya ia. Senang sekali, sudah tidak lulus dapat mobil lagi. Rita tidak akan protes kan? Jadi respon positif Rita menandakan nilai "jika ***p*** maka ***q***" bernilai ***benar (true)***

4. Apabila ***p*** salah dan ***q*** salah berasrti Rita tidak lulus ujian kemudian ayah tidak membelikan mobil. Dalam kasus ini apa tanggapan Rita? Rita tidak akan protes kan? Karena Rita tahu bahwa kalau tidak lulus pastinya tidak ada harapan mandapat mobil. Jadi nilai "jika ***p*** maka ***q***" **benar (*true*)**

b) Tentukan nilai kebenaran dari pernyataan berikut:

"Jika matahari terbit di sebelah barat, maka Hasan lulus ujian"

Pembahasan:
Implikasi ini bernilai benar karena antesedennya bernilai salah, walaupun konsekuen tidak diketahui nilai kebenarannya.

5. *Equivalence Rule* (aturan IF-AND ONLY-IF)

Biimplikasi atau *Equivalence* atau *bikondisional* adalah pernyataan majemuk dari dua pernyataan ***p*** dan ***q*** yang dinyatakan dengan notasi "$\boldsymbol{p} \leftrightarrow \boldsymbol{q}$". Biimplikasi $\boldsymbol{p} \leftrightarrow \boldsymbol{q}$ dapat diartikan sebagai implikasi dua arah $\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}$ dan $\boldsymbol{p} \leftarrow \boldsymbol{q}$ atau merupakan konjungsi "$(\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}) \wedge (\boldsymbol{q} \leftarrow \boldsymbol{p})$", sehingga nilai kebenaran dari $\boldsymbol{p} \leftrightarrow \boldsymbol{q}$ dapat ditentukan berdasarkan nilai kebenaran "$(\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}) \wedge (\boldsymbol{q} \leftarrow \boldsymbol{p})$". Biimplikasi 2 pernyataan hanya akan bernilai benar jika implikasi kedua kalimat penyusunnya sama-sama bernilai benar. Berikut di paparkan tabel kebenaran biimplikasi:

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{q} \rightarrow \boldsymbol{p}$	$(\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}) \wedge (\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q})$	$\boldsymbol{p} \leftrightarrow \boldsymbol{q}$
B	B	B	B	B	B
B	S	S	B	S	S
S	B	B	S	S	S
S	S	B	B	B	B

Dengan melihat tabel kebenaran biimplikasi maka biimplikasi $\boldsymbol{p} \leftrightarrow \boldsymbol{q}$ bernilai benar hanya apabila kedua pernyataan $\boldsymbol{p}$ dan $\boldsymbol{q}$ bernilai sama (keduanya bernilai benar atau keduanya bernilai salah). Selain daripada itu, biimplikasi bernilai salah.

Contoh:

Tentukan nilai kebenaran dari pernyataan-pernyataan dibawah ini:

a) Padang adalah ibu kota Sumatra Barat jika dan hanya jika Gunung Semeru berada di pulau Jawa

   Pembahasan:

   $\boldsymbol{p}$: Jakarta adalah ibu kota negara Republik Indonesia

   $\boldsymbol{q}$: Gunung Semeru berada di pulau Jawa.

   Pernyataan $\boldsymbol{p}$ dan $\boldsymbol{q}$ keduanya bernilai benar maka biimplikasi $\boldsymbol{p} \leftrightarrow \boldsymbol{q}$ bernilai benar.

b) Dua buah segitiga sebangun jika dan hanya jika ketiga sudut yang bersesuaian sama besar.

   Pembahasan:

   $\boldsymbol{p}$: Dua buah segitiga sebangun

   $\boldsymbol{q}$: Ketiga sudut yang bersesuaian sama besar pada soal ini masing-masing pernyataan tidak diketahui nilai kebenarannya, tetapi nilai kebenaran biimplikasi $\boldsymbol{p} \leftrightarrow \boldsymbol{q}$ dapat ditentukan, dengan mencari nilai kebenaran konjungsi $\boldsymbol{(p \rightarrow q) \wedge (q \leftarrow p)}$. Dalam hal ini implikasi $\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}$ merupakan implikasi logis yang bernilai benar, karena memang benar bahwa jika dua buah segitiga sebangun, maka segitiga sudut yang bersesuaian pada kedua segitiga sama besar. Sebaliknya apabila ketiga sudut yang bersesuaian pada dua buah segitiga sama besar, maka segitiga tersebut sebangun. Ini berarti $\boldsymbol{q \rightarrow p}$ bernilai benar. Sehingga konjungsi $\boldsymbol{(p \rightarrow q) \wedge (q \leftarrow p)}$ bernilai benar. Jadi, biimplikasi $\boldsymbol{p} \leftrightarrow \boldsymbol{q}$ bernilai benar *(true*).

6. ***Conditional Rule* (aturan IF-THEN-ELSE)**

Nilai kebenaran dari kondisional (*if **p** then **q** else **r***) adalah sama dengan nilai kebenaran dari ***q*** (jika nilai ***p*** adalah “benar”) dan bernilai sama dengan ***r*** (jika nilai ***p*** adalah “salah”). Dengan kata lain, jika ***p*** benar berlaku ***q*** dan jika ***p*** salah maka yang berlaku adalah ***r***.

p	***q***	***r***	*if **p** then **q** else **r***
B	B	B	B
B	B	S	B
B	S	B	S
B	S	S	S
S	B	B	B
S	B	S	S
S	S	B	B
S	S	S	S

Tabel Kebenaran (*Truth Table*)

Tabel kebenaran adalah suatu metode untuk menentukan nilai kebenaran dari suatu kalimat logika dengan menginterpretasi setiap simbol proposisi dengan menggunakan aturan semantik (*semantic rule*). Dengan aturan semantik dapat ditentukan nilai kebenaran suatu kalimat kompleks/majemuk untuk semua interpretasi yang memungkinkan.

• Biasanya ditabelkan dan disebut tabel kebenaran

• Jika terdapat *n* variabel, maka terdapat *2n* baris tabel kebenaran

Tabel kebenaran adalah cara yang paling jelas untuk membuktikan validitas suatu kalimat dengan menentukan kemungkinan nilai-nilai kebenaran yang diberikan pada simbol-simbol proposisinya. Jadi, bila suatu kalimat memuat simbol-simbol proposisi ***p*** dan ***q***, ada empat kemungkinan interpretasi yang perlu kita perhatikan, yaitu:

p bernilai "benar" dan ***q*** bernilai "benar"

p bernilai "benar" dan ***q*** bernilai "salah"

p bernilai "salah" dan ***q*** bernilai "benar"

p bernilai "salah" dan ***q*** bernilai "salah"

Proses tersebut dapat difasilitasi dengan suatu table, yang disebut tabel kebenaran.

Contoh:

Diberikan kalimat logika berikut: ***not (p and (not p)) or q***. Tentukan nilai kebenarannya dari kalimat tersebut di atas.

Penyelesaian:

Kalimat logika: ***not [p and (not p)] or q***, untuk lebih memudahkan penulisannya dalam tabel kebenarannya, kalimat tersebut diubah dalam notasi konvensional sebagai berikut: $\sim(\boldsymbol{p} \wedge \sim\boldsymbol{p}) \vee \boldsymbol{q}$. Dengan demikian, tabel kebenaran yang bersesuaian adalah:

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\sim\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{p} \wedge \sim\boldsymbol{p}$	$\sim(\boldsymbol{p} \wedge \sim\boldsymbol{p})$	$\sim(\boldsymbol{p} \wedge \sim\boldsymbol{p}) \vee \boldsymbol{q}$
B	B	S	S	B	B
B	S	S	S	B	B
S	B	B	B	S	B
S	S	B	S	B	B

Latihan soal:

Diberikan kalimat logika berikut: ***(if p then q) or (r and (not p))***. Tentukan nilai kebenarannya (*truth value*) dari kalimat tersebut !

Daftar Pustaka

Rinaldi Munir. (2016). *Matematika Diskrit* (6th ed.). Informatika Bandung.

Setiadi Rachmat. (2004). *Pengantar Logika Matematika*. Informatika Bandung.

Suraya. (2019). *Logika Informatika*. Fakultas Teknologi Industri.

Profil Penulis

Rafika Sari, S.Si., M,Si.

Latar belakang Pendidikan penulis yaitu S1 program studi Fisika FMIPA di Universitas Gadjah Mada Yogyakarta pada tahun 2012 dengan konsentrasi keilmuan Komputasi Fisika. Pada tahun 2014, penulis melanjutkan studi S2 di program studi Sains Komputasi FMIPA Institut Teknologi Bandung (ITB).

Saat ini penulis memilih untuk mengabdikan diri sebagai Dosen di program studi Informatika Fakultas Ilmu Komputer Universitas Bhayangkara Jakarta Raya dengan aktif mengajar beberapa mata kuliah diantaranya Fisika, Aljabar Linear, Kalkulus, Metode Numerik, Statistika dan Probabilitas, Matematika Diskrit, Sistem Digital, Data Mining, Machine Learning, dst. Berbagai asosiasi profesi juga diikuti oleh penulis untuk menambah kompetensi keilmuannya, diantaranya Asosiasi Perguruan Tinggi Ilmu Komputer (APTIKOM), Masyarakat Komputasi Indonesia (MKI), Asosiasi Ilmuwan Data Indonesia (AIDI), *Indonesian Computer Electronics and Instrumentation Support Society* (INDOCEISS), *Physical Society Indonesia* (PSI), dan Relawan Jurnal Indonesia (RJI).

Ketertarikan penulis pada bidang *Data Science* dan *Artificial Intelligence* sehingga telah banyak menghasilkan karya publikasi penelitian dibidang tersebut. Beberapa penelitian yang telah dilakukan didanai oleh internal perguruan tinggi dan juga Kemdikbudristek DIKTI. Selain peneliti, penulis juga aktif menulis buku dengan harapan dapat memberikan kontribusi positif bagi bangsa dan negara. Saat ini penulis juga aktif sebagai Editor in Chief pada Journal of Computer Science Contributions (JUCOSCO).

Email Penulis: rafika.sari@dsn.ubharajaya.ac.id

4

LOGIKA PROPOSISI DASAR 2

Dairoh
Politeknik Harapan Bersama

Seperti kita ketahui bahwa proposisi merupakan sebuah kalimat deklaratif yang bisa bernilai benar atau sebaliknya bernilai salah atau bahkan tidak bernilai keduannya. Dimana nilai benar atau salah tersebut pada sebuah proposisi disebut dengan nilai kebenaran dan nilai kebenaran bergantung pada realitasnya. Proposisi majemuk dalam logika matematika ini terdiri dari satu atau lebih pernyataan yang kemudian dihubungkan dengan sebuah kata penghubung. Sehingga pada bab logika proposisi dasar 2 ini akan membahas tentang beberapa kata kata penghubung didalam sebuah pernyataan-pernyataan dasar didalam logika diantaranya tentang negasi, disjungsi, konjungsi, tabel kebenaran gabungan, translasi bentuk kalimat.

Negasi

Negasi atau ingakaran atau kontradiksi didefinisikan sebagai sebuah pernyataan yang bernilai negatif jika pernyataan bernilai positif atau pernyataan yang bernilai salah apabila pernyataan bernilai benar begitu juga sebaliknya yang disimbolkan dengan simbol $\neg$ atau $\sim$atau $-$. Apabila diketahui sebuah pernyataan P kemudian di negasikan maka dapat kita tuliskan $\neg$ p atau $\sim$p, atau $\bar{p}$ Sehingga apabila terdapat $\neg$ p atau $\sim$p atau $\bar{p}$ maka dapat kita baca bukan p atau tidak p atau tidak benar bahwa P (Syariful Fahmi & Priwantoro, 2021).

Contoh:

1. Jika P: 3 adalah bilangan prima (pernyataan benar)

   Maka $\sim$p: 3 adalah bukan bilangan prima (pernyataan salah)

2. Jika P : Boyolali adalah salah satu Kabupaten di Provinsi Jawa Tengah (pernyataan benar)

Maka ~p : Boyolali adalah bukan salah satu Kabupaten di Provinsi Jawa Tengah (pernyataan salah)

3. Jika q : $10 > 20$. (pernyataan salah)

   Maka ~q : tidak bener $10 > 20$

   Atau ~q : $10 < 20$ (pernyataan benar)

4. Jika p : Ratna adalah mahasiswa dengan menggunakan kacamata

   Maka ~p : tidak benar Ratna adalah mahasiswa dengan menggunakan kacamata

5. Jika P : Semut lebih besar dari Gajah (pernyataan salah)

   Maka ~p : Tidak benar semut lebih besar dari gajah (pernyataan benar)

   Atau ~p : semut lebih kecil dari gajah (pernayataan benar)

Dari pernyataan kalimat diatas maka dapat disimpulkan bahwa negasi dapat di nyatakan dalam bentuk bukan, tidak, tidak benar bahwa. Dimana letak negasi dapat dituliskan pada awal yakni "tidak benar bahwa" dan "bukan" sedangkan untuk pernyataan tidak ini merupakan negasi atau ingkaran dari pernyataan proposisi semula. Sehingga dari contoh di atas maka kita bisa menuliskan nilai negasi atau ingkaran dari suatu proposisi diatas sepertu pada tabel 4.1 berikut:

Tabel 4.1 Tabel Nilai kebenaran dari negasi atau ingkaran pada suatu proposisi(Kusumah, 2013)

p	~p
B	S
S	B

Keterangan:

B = Benar

S = Salah

Tabel 4.1 diatas merupakan tabel nilai kebenaran dari suatu negasi atau ingkaran. Dari tabel diatas menjelaskan nilai kebenaran dari sebuah pernyataan yang majemuk tertentu pada setiap kemungkinan kombinasi dari nilai kebenaran dari sebuah proposisi (pernyataan) yang membentuknya.

Soal Latihan

Carilah Negasi dari soal berikut:

1. Sheila On7 adalah band yang berasal dari kota Yogyakarta
2. Manusia memiliki ekor
3. Mata uang Indonesia adalah rupiah
4. Jakarta adalah ibu kota Negara Indonesia
5. Jumlah hari dalam satu minggu adalah 8
6. Bunga mawar berwarna hitam
7. Bunga melati bewarna putih
8. Bandung adalah salah satu kota di Jawa Tengah
9. Mahasiswa semester pertama sedang menyelesaikan tugas akhir
10. Jumlah provinsi di Indonesia adalah 30
11. 5 adalah bilangan genap
12. 10 adalah bilangan habis di bagi 2
13. 4 adalah bilangan yang habis di bagi dengan 2
14. Monumen nasional berada di kota Bogor
15. $2 > 7$

Disjungsi

Disjungsi merupakan penghubung dalam sebuah pernyataan majemuk dengan menggunakan kata pengubung nya adalah “atau” yang disimbolkan dalam bentuk “$\vee$”. Dimana didalam disjungsi ini terdapat dua pernyataan yang kemudian di hubungkan dalam kata penghubung atau. Misal ada pernyataan p dan q, maka kita dapat menggabungkan dalam bentuk disjungsi nya $p \vee q$ atau dapat kita tuliskan “p atau p”. (Kusumah, 2013)(Syariful Fahmi & Priwantoro, 2021)

Sebagai contoh dari disjungsi

1. Bu Andri berlangganan koran merdeka atau Kedaulatan Rakyat.

   Maka:

p = Bu Andri Berlangganan koran merdeka

q = Bu andri berlangganan koran kedaulatan rakyat

sehingga bentuk disjungsi nya : $p \vee q$

2. Zahra pergi ke perpustakaan atau ke kantin sekolah

   Maka :

   a = Zahra Pergi ke perpustakaan

   b = Zahra pergi ke kantin

   sehingga bentuk disjungsi nya : $p \vee q$

Sehingga dari contoh di atas maka kita dapat menentukan nilai disjungsi, Apabila bernilai “salah” jika dua pernyataan tunggal bernilai salah dan bernilai kebenaran maka $p \vee q$ bernilai benar, selain itu dapat juga dapat mendefinisikan nilai disjungsi apabila:

- Dikatakan sebagai disjungsi inklusif bernilai benar jika sekurangkurangya terdapat salah satu pernyataan tunggal bernilai benar.
- Dikatakan disjungsi ekslusif bernilai benar jika salah satu atau tidak keduanya dari pernyataan tunggal bernilai benar.(Syariful Fahmi & Priwantoro, 2021)

Kemudian kita dapat definisikan pernyataan diatas dalam bentuk tabel kebenaran disjungsi pada dua pernyataan p dan q seperti pada tabel 4.2 berikut:

Tabel 4.2 Tabel Kebenaran Disjungsi dua pernyataan (Kusumah, 2013)

p	q	$p \vee q$
B	B	B
B	S	B
S	B	B
S	S	S

Keterangan:

B = Benar

S = Salah

Contoh simbolkan pernyataan berikut dan tentukam nilai kebenarannya

1. Anak itu pintar atau aku yang malas

   Maka :

   p = anak itu pintar (benar)

   q = aku yang malas (salah)

   sehingga pernyataan dari dua pernyataan tersebut dalam bentuk disjungsi dituliskan seperti $p \vee q$ dan bernilai kebenaran benar, karena terdapat satu pernyataan yang benar

2. Zahra berbadan gempil atau ia berambut keriting (benar)

   p = Zahra berbadan gempil (benar)

   q = Ia berambut keriting (benar)

   sehingga pernyataan dari dua pernyataan tersebut dalam bentuk disjungsi dituliskan seperti $p \vee q$ dan bernilai kebenaran benar, karena dua pernyataan tersebut bernilai benar

3. 10 habis di bagi 3 atau bu Dai adalah bukan seorang dosen di teknik informatika

   Maka :

   p = 10 habis di bagi 3 (salah)

   q = Bu Dai dalah bukan dosen Teknik informatika (salah)

   sehingga pernyataan dari dua pernyataan tersebut dalam bentuk disjungsi dituliskan seperti $p \vee q$ dan bernilai kebenaran salah, karena dua pernyataan tersebut bernilai salah

4. Tugas akhir dikerjakan disemester satu atau dikerjakan disemester delapan

   Maka :

   p = Tugas akhir dikerjakan disemester satu (salah)

   q = Tugas akhir dikerjakan disemester delapan(benar)

   sehingga pernyataan dari dua pernyataan tersebut dalam disjungsi dtuliskan seperti $p \vee q$ dan bernilai kebenaran benar karena terdapat satu pernyataan yang benar.

Soal Latihan

Tentukan Nilai kebenaran dari proposisi-proposisi dibawah ini:

1. 5 adalah nilai dari akar kuadrat 25 atau 5 bilangan yang habis di bagi 2
2. $10 \geq 20$ atau 5 adalah bilangan genap
3. $20 \div 5 = 10$ atau 2 adalah bilangan ganjil
4. Jakarta merupakan provinsi di Kalimantan atau Balikpapan adalah kota di Kalimantan timur
5. Kucing lebih besar dari gajah atau satu tahun ada 13 bulan
6. Jumlah hari dalam satu minggu adalah 5 atau setelah bulan Agustus adalah November
7. Kampus Politeknik Harapab Bersama berada di Tegal atau Tegal merupakan salah satu kota di Provinsi Jawa Tengah
8. 5 + 5 = 15 atau 15 merupakan bilangan yang habis di bagi 2
9. 7 adalah bilangan prima atau 20 habis di bagi 10
10. Rumah saya sangat besar atau rumah saya mewah
11. 5 -3 = 4 atau $1 \geq 20$
12. 4 x 20 =100 atau 5 adalah bilangan prima
13. Ibu saya pedagang atau saya adalah anak tunggal
14. 2-1 = 0 atau 5 adalah bilangan komposit
15. 25 adalah bilangan genap atau seratu habis di bagi 40

Konjungsi

Pengubung kata dalam proposisi majemuk selanjutnya adalah konjungsi. Konjungsi didefinisikan sebagai proposisi majemuk yang dihubungkan dengan kata “dan” yang disimbolkan dengan “$\wedge$”. Dimana nilai didalam konjungsi apabila terdapat dua pernyataan yakni p dan q, dengan bentuk proposisi konjungsinya dituliskan dalam bentuknya adalah $p \wedge q$, maka akan bernilai kebenaran jika kedua proposisi yang terbentuk bernilai kebenaran semua dan bernilai salah apabila proposisi (pernyataan) yang membentuk terdapat minimal salah satu bernilai salah. Sehingga sebuah konjungsi dikatakan bernilai kebenaran jika komponen keduanya benar, namun apabila salah satu komponen di dalam proposisi tersebut terdapat salah satu bernilai salah atau kedua-duanya proposisi tersebut bernilai salah, maka nilai kebenarannya adalah salah. (Kusumah, 2013)(Bahri, 2016)

Coba kita pahami betul kaitannya dengan pemahaman konjungsi seperti pada contoh berikut:

Contoh

1. Bandung ibu kota Jakarta dan ayam adalah hewan berkaki empat

   Maka :

   p : Bandung ibu kota Jakarta (salah)

   q : ayam adalah hewan berkaki empat (salah)

   Sehingga kita bisa menuliskan simbol konjungsinya $p \wedge q$ bernilai kebenaran salah.

2. Bunga melati berwarna putih dan bunga mawar berwaran merah

   Maka :

   p : Bunga melati berwarna putih (benar)

   q : Bunga Mawar berwarna Merah (benar)

   Sehingga kita bisa menuliskan simbol konjungsinya menjadi $p \wedge q$ dan bernilai kebenaran benar.

3. Salamah adalah seorang Wanita yang cantik dan pandai

   Maka :

   p : Salamah adalah seorang wanita yang cantik (benar)

   q : Salamah adalah seorang wanita yang pandai (benar)

   Sehingga kita bisa menuliskan simbol konjungsinya menjadi $p \wedge q$ dan bernilai kebenaran benar.

4. Kuala lumpur adalah ibu kota Negara Malaysia dan 4 x 4 =16

   p : Kuala lumpur adalah ibu kota Negara Malaysia (benar)

   q : 4 x 4 = 16 (benar)

   Sehingga kita bisa menuliskan simbol konjungsinya menjadi $p \wedge q$ dan bernilai kebenaran benar.

5. Bogor adalah satu kabupaten di Jakarta dan Semarang adalah salah Kabupaten di Jawa Timur

p : Bogor adalah satu kabupaten di Jakarta (salah)

q : Semarang adalah salah Kabupaten di Jawa Timur (salah)

Sehingga kita bisa menuliskan simbol konjungsinya menjadi

$p \wedge q$ dan bernilai kebenaran salah.

Sehingga dari definisi dan contoh diatas maka kita dapat menuliskan atau menyaratakа nilai kebenaran konjungsi dalam tabel kebenaran konjungsi dua pernyatan seperti pada tabel 4.3 berikut:

Tabel 4.3 Tabel kebenaran konjungsi pada dua pernyataan(Syariful Fahmi & Priwantoro, 2021)

P	q	$p \wedge q$
B	S	S
B	B	B
S	B	S
S	S	S

Keterangan:

B = Benar

S = Salah

Soal Latihan

Tentukan Nilai kebenaran dari proposisi-proposisi dibawah ini:

1. Indonesia merupakan Negara yang berbentuk Republik dan berpenduduk 10 juta penduduk jiwa.
2. Gajah berkaki 4 dan gajah suka makan daging
3. 4 adalah bilangan ganjil dan 4 bilangan yang habis di bagi 2
4. Kambing adalah hewan berkaki dua dan kambing makan daging
5. Palembang adalah satu kota di Indonesia dan Empek-empek dari Padang
6. Nasi padang adalah nasi khas Semarang dan padang adalah ibu kota Semarang
7. 4 + 4 = 10 dan 10 adalah bilangan genap

8. 20: 4 = 5 dan 5 adalah bilangan ganjil
9. Kuku-kupu adalah hewan terbang dan bisa berlari kencang
10. Kura-kura adalah hewan berkaki empat dan bisa terbang secara cepat
11. 3 adalah bilangan ganjil dan 3 adalah bilangan prima
12. Jumlah bulan dalam satu tahun adalah 13 dan jumlah hari dala satu minggu 7
13. Bj Habibe adalah penemu listrik dan sangat jenius
14. 50 habis di bagi 10 dan merupakan bilangan genap
15. Rumah saya besar dan rumah saya luas

Tabel Kebenaran Gabungan

Seperti yang telah di jelasakan pada masing-masing kata penghubung proposisi diatas bahwa didalam proposisi majemuk ada beberapa kata penghubung seperti pada negasi, konjungsi dan disjungsi. Sehingga tabel kebenaran di definisikan sebagai tabel didalam matematika yang menjelaskan atau digunakan untuk melihat nilai kebeneran dari sebuah pernyataan atau proposes (Kusumah, 2013)i. Yang disimbolkan B untuk pernyataan benar dan S untuk pernyataan salah. Sehingga nilai tabel kebenaran gabungan seperti pada tabel 4.4 berikut:

Tabel 4.4 Table kebenaran gabungan pada proposisi majemuk

p	q	~p	$\sim q$	$p \vee q$	$\sim p \vee q$	$p \vee \sim q$	$\sim p \vee \sim q$	$p \wedge q$	$\sim p \wedge q$	$p \wedge \sim q$	$\sim p \wedge \sim q$
B	B	S	S	B	B	B	S	B	S	S	S
B	S	S	B	B	S	B	B	S	S	B	S
S	S	B	B	S	B	B	B	S	S	S	B
S	B	B	S	B	B	S	B	S	B	S	S

Soal Latihan

1. lengkapi tabel kebenaran berikut untuk tiap nilai penghubung proposisi berikut:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee q$	$\sim p \vee q$	$p \vee \sim q$	$\sim p \vee \sim q$	$p \wedge q$	$\sim p \wedge q$	$p \wedge \sim q$	$\sim p \wedge \sim q$
S	B										
S	S										
B	S										
B	B										

2. lengkapi tabel kebenaran berikut untuk tiap nilai penghubung proposisi berikut ini:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee q$	$\sim(\sim p \vee q)$	$\sim(p \vee \sim q)$	$\sim(\sim p \vee \sim q)$	$p \wedge q$	$\sim(\sim p \wedge q)$	$\sim(p \wedge \sim q)$	$\sim(\sim p \wedge \sim q)$
S	B										
S	S										
B	S										
B	B										

3. lengkapi tabel kebenaran berikut untuk tiap nilai penghubung proposisi berikut ini:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim(p \vee q)$	$(\sim p \vee \sim q)$	$(p \vee \sim q)$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim(\sim p \wedge q \sim)$	$\sim(\sim p \wedge \sim q)$
S	B								
S	S								
B	S								
B	B								

Translasi Bentuk Kalimat

Translasi bentuk kalimat didalam proposisi didefinisikan sebagai cara untuk merubah kalimat kedalam bentuk pernyataan yang dirubah kedalam premis-premis logika, yang kita misalkan kedalam p atau q atau yang lainnya tergantung dari bentuk kalimat yang membentuknya (Syariful Fahmi & Priwantoro, 2021)(Anwar et al., 2019).

Misal terdapat :

Premis 1 : Jika hari ini hujan maka saya pakai jas hujan (benar)

Premis 2: saya tidak pakai jas hujan (benar)

Konklusi: hari ini tidak hujan (benar)

Sehingga bentuk simbol nya

Premis 1 : $p \rightarrow q$

Premis 2 : $\sim q$

Konklusi : $\sim p$

Translasi bentuk kalimat juga disesuaikan dengan fakta dilapangan sebagai contoh:

1. Jika pintu rel kereta api di tutup, lalu lintas akan berhenti. Apabila lalu lintas berhenti akan terjadi kemacetan lalu lintas. Pintu kereta api ditutup, jadi terdapat kemacetan lalu lintas. Maka formulasi nya ke dalam premi-premi (simbol) logika menjadi:

Fakta	Simbol	premis
Pintu rel kereta api ditutup	p	
lalu lintas akan berhenti	q	$p \rightarrow q$
lalu lintas berhenti	q	
terjadi kemacetan lalu lintas	r	$q \rightarrow r$
Pintu kereta api di tutup	p	P
Terdpat kecamatan	q	q

2. Jika saya belajar dan saya lulus ujian

   Maka premi-preminya (simbol) dapat kita tentukan misalkan:

   p : Jika saya belajar (benar)

   q : saya lulus ujian (benar)

   konklusi : Saya lulus ujian (benar)

   sehingga simbolnya

   Premis 1 : $p \rightarrow q$

   Premis 2 : p

   Konklusi : q

Daftar Pustaka

Anwar, C., Rayeb, M. El, & SI, M. M. (2019). Modul Dasar Logika dan Matematika. In *Universitas Pembangunan Jaya*.

Bahri, S. (2016). *LOGIKA dan HIMPUNAN* (Vol. 4, Issue 1).

Kusumah, Y. S. (2013). *Logika Matematika Elementer* (Vol. 2, Issue December).

Syariful Fahmi, & Priwantoro, S. W. (2021). *Logika Matematika dan Himpunan*.

Profil Penulis

Dairoh, M.Sc

Penulis tertarik dengan berlajar matematika saat mengambil keputusan untuk belajar fisika di Universitas Jenderal Soedirman di tahun 2006 dan Lulus di tahun 2010. Kemudian penulis melanjutkan studi S2 di ilmu Fisika Universitas Gadjah Mada dan lulus di tahun 2012.

Penulis tertarik dalam bidang komputasi dan Data Science. Hal ini diwujudkan dan bergabung di menjadi dosen di Politeknik Harapan Bersama di Tegal sejak 2014 tepatnya di Program Studi Sarjana Terapan Teknik Informatika. Dalam Prodi tersebut penulis mengisi pengajaran pada mata kuliah Kalkulus, Matematika diskrit, Aljabar liniear, Matematika Numerik dan Fisika Teknik. Selain itu penulis juga rutin melaksanakan tri dharma perguruan tinggi guna meningkatkan profesionalisme dosen, penulis juga aktif melakukan penelitian dengan pengabdian yang di biaya mitra, Dikti dan Institusi. Penulis juga aktif melakukan publikasi dan menulis salah satu buku. Selain meneliti penulis terus belajar untuk menulis buku yan dapat diamnfaatkan dalam media pembelajaran di ruang kuliah.

Email Penulis: dairoh@poltektegal.ac.id

5

LOGIKA PROPOSISI DASAR 3

Ayunda Sriwahyuningrum
Universitas Indraprasta PGRI

Implikasi dan biimplikasi termasuk ke dalam proposisi dasar logika matematika. Perlu diingat kembali bahwa **proposisi** adalah sebuah kalimat deklaratif atau kalimat tertutup dengan nilai kebenaran yang pasti, yaitu bernilai benar atau bernilai salah, tidak bisa kedua-duanya (Epstein, 2011; Siang, 2014). Suatu proposisi dapat dihubungkan dengan proposisi lainnya hingga membentuk sebuah proposisi yang baru dengan menggunakan kata-kata penghubung (*connectives*). Kata-kata penghubung ini selanjutnya juga sering disebut operasi logika (Enderton, 2001). Apabila *p*, *q*, dan *r* adalah lambang sebuah proposisi, maka contoh penggunaan kata penghubung dapat dilihat pada Tabel 5.1.

Tabel 5.1 Kata Penghubung dan Contoh Penggunaannya

Kata Penghubung (*Connective*)	Simbol	Contoh Penggunaan Kata Penghubung		Istilah
tidak / bukan	$\sim$	$\sim p$	negasi dari p	Ingkaran/Negasi
dan	$\wedge$	$p \wedge q$	p dan q	konjungsi
atau	$\vee$	$p \vee q$	p atau q	disjungsi
jika…, maka…	$\rightarrow$	$p \rightarrow q$	Jika p, maka q	implikasi
jika dan hanya jika	$\leftrightarrow$	$p \leftrightarrow q$	p jika dan hanya jika q	biimplikasi

Tabel 5.2 Tabel Nilai Kebenaran Ingkaran, Konjungsi, dan Disjungsi

Ingkaran/Negasi	
p	$\sim p$
B	S
S	B

Konjungsi		
p	q	$p \wedge q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	S

Disjungsi		
p	q	$p \vee q$
B	B	B
B	S	B
S	B	B
S	S	S

Adapun ketika suatu proposisi terdiri dari lebih dari satu kata penghubung, maka “tanda kurung” perlu digunakan agar maknanya menjadi jelas. Sama halnya dengan operasi aljabar, kata penghubung juga memiliki tingkatan prioritas (Wolf, 2005). Prioritas kata penghubung dari yang tertinggi hingga yang terendah adalah $\sim, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$. Sebagai contoh, $p \rightarrow (q \wedge r)$, dan penulisan $\sim p \rightarrow q$ akan dimaknai $(\sim p) \rightarrow q$ daripada $\sim (p \rightarrow q)$.

Tabel 5.3 Tabel Nilai Kebenaran Implikasi dan Biimplikasi

Implikasi		
p	q	$p \rightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	B
S	S	B

Biimplikasi		
p	q	$p \leftrightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	B

Berkenaan dengan operasi logika, masing-masing bentuk tentunya memiliki nilai-nilai kebenaran (*truth-values*), seperti bentuk ingkaran, konjungsi, dan disjungsi yang telah dibahas pada bab sebelumnya (Tabel 5.2). Nilai-nilai kebenaran pada implikasi dan biimplikasi dapat kita amati pada Tabel 5.3.

Implikasi

Bentuk $p \rightarrow q$ dapat dikatakan sebagai sebuah pernyataan kondisional (***conditional statement***) atau sebuah **implikasi**, dengan *p* adalah anteseden, hipotesis, premis, atau syarat, sedangkan *q* adalah konklusi, konsekuen, atau akibat (Epstein, 2011; Bhoi, 2018). Bentuk tersebut menunjukkan bahwa *q* itu benar/terjadi dengan syarat *p* sehingga implikasi juga dikenal sebagai **proposisi bersyarat** (*p* adalah **syarat cukup** untuk *q*, sedangkan *q* adalah **syarat perlu** bagi *p*) (Siang, 2014). Ada beberapa cara mengekspresikan implikasi $p \rightarrow q$ (Bhoi, 2018), di antaranya sebagai berikut:

▪ Jika p, maka q	(*if* p, *then* q)	▪ q jika p	(q *if* p)
▪ p mengakibatkan q	(p *implies* q)	▪ q bilamana p	(q *whenever* p)
▪ Jika p, q	(*if* p, q)	▪ q ketika p	(q *when* p)
▪ p hanya jika q	(p *only if* q)	▪ q syarat perlu bagi p	(q *is necessary condition for* p)
▪ p syarat cukup untuk q	(p *is sufficient condition for* q)	▪ Syarat perlu bagi p adalah q	(*a necessary condition for* p *is* q)
▪ Syarat cukup untuk q adalah p	(*a sufficient condition for* q *is* p)	▪ q mengikuti dari p	(q *follows from* p)

Contoh 1 (Bentuk proposisi yang termasuk implikasi)

a) Jika sore hari tidak hujan, maka saya akan menghadiri acara di kantor.

b) Anda bisa mendapatkan nilai A pada mata kuliah ini hanya jika Anda mendapatkan nilai akhir minimal 80.

c) Jika kecepatan melaju kendaraan dinaikkan, saya lebih cepat untuk tiba di rumah.

d) Syarat cukup agar Irsyad bisa mengambil mata kuliah Logika Matematika adalah sudah lulus dalam mata kuliah Kalkulus Dasar.

Contoh 2

Tuliskan proposisi berikut ke dalam bentuk "jika *p*, maka *q*".

"Syarat cukup agar Irsyad bisa mengambil mata kuliah Logika Matematika adalah sudah lulus dalam mata kuliah Kalkulus Dasar."

Solusi:

Ingat bahwa $p \rightarrow q$ dapat dibaca "*p* syarat cukup untuk *q*" sehingga proposisi yang diberikan bisa ditulis "lulus dalam mata kuliah Kalkulus Dasar adalah syarat cukup agar Irsyad bisa mengambil mata kuliah Logika Matematika."

Ini berarti

p : lulus dalam mata kuliah Kalkulus Dasar

q : Irsyad bisa mengambil mata kuliah Logika Matematika

Dengan demikian, proposisi dapat dinyatakan ke bentuk implikasi "jika *p*, maka *q*" menjadi "Jika lulus dalam mata kuliah Kalkulus Dasar, maka Irsyad bisa mengambil mata kuliah Logika Matematika."

Contoh 3 (mengubah proposisi ke bentuk simbolik)

Diketahui:

p : Yuki pergi les berenang

q : Yuki ada di sekolah

r : Yuki sedang mengerjakan tugas kelompok

s : Yuki sedang bersama teman-teman

Nyatakan kalimat di bawah ini dalam bentuk simbolik:

a) Jika Yuki tidak pergi les berenang, maka ia pasti sedang mengerjakan tugas kelompok bersama teman-temannya di sekolah.

b) Yuki berada di sekolah jika ia sedang mengerjakan tugas kelompok.

Solusi:

a) $\sim p \to (r \wedge s \wedge q)$

b) Perlu diingat bahwa $p \to q$ dapat dibaca "q jika p" sehingga kalimat di atas dapat dinyatakan sebagai $r \to q$.

Implikasi $p \to q$ pada dasarnya bisa menggambarkan suatu syarat, hubungan sebab-akibat, pertanda, maupun janji (Enderton, 2001; Gregory, 2015):

1. Untuk menyatakan suatu syarat

"Jika kamu tidak memiliki karcis, maka kamu tidak akan diperbolehkan masuk"

2. Untuk menyatakan hubungan sebab-akibat

"Bila Rudi tidur larut malam, maka Rudi pasti telat berangkat ke sekolah"

3. Untuk menyatakan pertanda

"Bila bel berbunyi, maka gerbang sekolah ditutup"

4. Untuk mengekspresikan sebuah janji

"Jika sore hari tidak hujan, maka saya akan menghadiri undanganmu"

Proposisi dan Nilai-Nilai Kebenaran pada Implikasi

Ada beberapa hal yang turut menjadi catatan penting ketika memahami logika implikasi, yaitu:

Pertama, antar proposisi dalam implikasi tidak harus memiliki koneksi satu sama lain.

Implikasi pada kenyataannya hanya mementingkan nilai kebenaran masing-masing proposisi (anteseden dan konsekuen), tidak terlalu mementingkan apakah antara anteseden dan konsekuen benar-benar ada keterkaitan (hubungan sebab-akibat) atau tidak. Suatu implikasi dinyatakan valid, meskipun tidak mempunyai makna (Kunen, 2012), seperti pada Contoh 4. Ungkapan "*p* mengakibatkan *q*" terlihat menerangkan bahwa ada hubungan kausal antara *p* dan *q*, namun itu tidak diperlukan dalam konsep logika (Bhoi, 2018; Gregory, 2015; Mendelson, 2015). Penentuan nilai kebenaran suatu implikasi pada akhirnya hanya berdasarkan definisi, tanpa memperhatikan hubungan antara anteseden dan konsekuen.

Contoh 4

a) Jika 1 + 1 = 2, maka hari ini cerah.

b) Jika segitiga ABC adalah segitiga siku-siku, maka bunga-bunga bermekaran.

c) $5 < 6 \rightarrow 2 + 2 = 4$

Bentuk $p \rightarrow q$ (jika *p*, maka *q*) pada dasarnya hanya memberi penekanan bahwa $p \rightarrow q$ diasumsikan benar. Ini berarti apabila *p* itu benar terjadi, maka bisa langsung disimpulkan bahwa *q* pasti terjadi. Dengan demikian, kesimpulan *q* berdasarkan *p* ini menjadi kebenaran pertama.

Kedua, implikasi bernilai salah jika anteseden bernilai benar dan konsekuen bernilai salah.

Apabila kita perhatikan tabel kebenaran implikasi (Tabel 5.3), nilai kebenaran pada baris kedua adalah satu-satunya yang berbeda (Gregory, 2015; Kneebone, 1963). Bentuk implikasi $p \rightarrow q$ pada mulanya sudah didefinisikan bahwa anteseden bernilai benar dan konsekuen bernilai benar untuk mencapai semacam "perjanjian" atau kesimpulan awal. Ini berarti kesimpulan tidak mungkin terjadi atau tercapai ketika anteseden benar, namun konsekuen salah, karena itu sama saja diibaratkan melanggar "perjanjian" awal.

Ketiga, anteseden bernilai salah. implikasi tetap terpenuhi.

Kenyataan lainnya yang menjadi sorotan adalah bentuk $p \rightarrow q$ bernilai benar pada tiga kondisi, khususnya $p \rightarrow q$ tetap bernilai benar ketika p salah. Ini menunjukkan bahwa ketika anteseden bernilai salah atau tidak terjadi, implikasinya masih terpenuhi.

Berkenaan dengan nilai-nilai kebenaran pada suatu implikasi, Contoh 5 dan Contoh 6 dapat menjadi pembuktian yang logis (Epstein, 2011; Bhoi, 2018), sekaligus memberikan gambaran terkait nilai kebenaran ketika anteseden bernilai salah (SBB dan SSB).

Contoh 5

Seseorang berjanji kepada temannya, “Jika sore hari tidak hujan, maka saya akan menghadiri undanganmu.”

Kita dapat meninjau apakah orang tersebut mengatakan kebenaran atas janjinya ataupun tidak menepati janji tersebut dari empat kondisi berikut.

Kondisi 1: Sore hari tidak hujan (*anteseden benar*) dan dia menghadiri undangan (*konsekuen benar*). Ini merupakan definisi (janji) awal sehingga sudah diasumsikan **benar**. (BBB)

Kondisi 2: Sore hari tidak hujan (*anteseden benar*) tetapi dia tidak menghadiri undangan (*konsekuen salah*). Ini berarti orang tersebut ingkar janji (pernyataannya **salah**). (BSS)

Kondisi 3: Sore hari hujan (*anteseden salah*) dan dia menghadiri undangan (*konsekuen benar*). Kenyataan ini menggambarkan bahwa orang tersebut **tidak dapat dikatakan salah** bila ia tetap mau datang meskipun hujan karena yang terpenting adalah ia tidak mengingkari janjinya. (SBB)

Kondisi 4: Sore hari hujan (*anteseden salah*) dan dia tidak menghadiri undangan (*konsekuen salah*). Pernyataan ini berarti **benar**. (SSB)

Contoh di atas memperlihatkan bahwa $p \rightarrow q$ menjadi perjanjian awal yang ditetapkan. Ketika kondisi p ternyata tidak terjadi atau tidak terpenuhi, maka kenyataan q itu tetap tidak terpatahkan, tetap memungkinkan untuk dilakukan.

Contoh 6

"Jika *x* dan *y* bilangan ganjil, maka jumlah dari *x* dan *y* adalah bilangan genap"

Kita dapat meninjau kebenaran implikasi ini dengan memisalkan *x* dan *y* menggunakan bilangan sebagai berikut:

Kondisi 1:

3 dan 5 (*x* dan *y* semuanya bilangan ganjil) – *anteseden benar*

3 + 5 = 8 ($x + y$ adalah bilangan genap) – *konsekuen benar*

Jadi, implikasi bernilai benar **(BBB)**

Kondisi 2:

3 dan 5 (*x* dan *y* semuanya bilangan ganjil) – *anteseden benar*

3 + 5 = 8 ($x + y$ dinyatakan bukan termasuk bilangan genap adalah suatu hal yang salah) – *konsekuen salah*

Jadi, implikasi bernilai salah **(BSS)** karena ketika anteseden sesuai dengan definisi awal, namun penjumlahannya dianggap salah, maka kenyataan ini bertentangan.

Kondisi 3:

4 dan 6 (*x* dan *y* keduanya bukan bilangan ganjil) – *anteseden salah*

4 + 6 = 10 ($x + y$ adalah bilangan genap) – *konsekuen benar*

Jadi, implikasi bernilai benar **(SBB)** karena ketika anteseden dibuat tidak sesuai dengan definisi awal, ternyata konsekuen bisa tetap bernilai benar.

Kondisi 4:

4 dan 7 (hanya ada satu bilangan ganjil) – *anteseden salah*

4 + 7 = 11 ($x + y$ adalah bilangan ganjil) – *konsekuen salah*

Jadi, implikasi bernilai benar **(SSB)** karena ketika anteseden dibuat tidak sesuai dengan definisi awal, maka konsekuen juga akan tidak sesuai sehingga kenyataan ini bernilai benar.

Contoh 7

Tentukan nilai kebenaran setiap implikasi berikut:

a) Jika 5 adalah faktor dari 10, maka jumlah semua faktor positif dari 10 adalah 18.

b) Jika $x^2 < 0$, maka $x^2 + 1 \geq 1$

Solusi:

a) Misal, *p* : 5 adalah faktor dari 10 (*bernilai benar*)

q : jumlah semua faktor positif dari 10 adalah 18 (*bernilai benar, karena* $1+2+5+10=18$)

Karena *p* dan *q* bernilai benar, maka $p \rightarrow q$ bernilai **benar**.

b) Misal, *p* : $x^2 < 0$ (*bernilai salah, karena hasil bilangan kuadrat tidak mungkin bernilai negatif*)

q : $x^2 + 1 \geq 1$ (*bernilai benar*)

Karena *p* salah dan *q* benar, maka $p \rightarrow q$ bernilai **benar**.

Biimplikasi

Setelah mempelajari implikasi, tinjaulah pernyataan berikut ini: “Jika ada sepeda putih di garasi rumah, maka paman sedang berkunjung.” Pernyataan tersebut menggambarkan bahwa:

1. Jika kamu melihat ada sepeda putih di garasi rumah, maka kamu tahu bahwa paman sedang ada di sini (berkunjung ke rumah), tetapi
2. Jika kamu melihat paman, maka kamu belum bisa memastikan bahwa ada sepeda putih di garasi rumah.

Pernyataan yang kita miliki dapat direpresentasikan sebagai $s \rightarrow p$, dengan tanda panah menunjuk ke arah implikasi (sepeda putih menyiratkan paman) (Zegarelli, 2007).

Sekarang tinjaulah pernyataan kedua ini: “Sebuah sepeda putih berada di garasi rumah jika dan hanya jika paman sedang berkunjung.” Pernyataan ini terlihat sama dengan yang sebelumnya, namun penggunaan kata “jika dan hanya jika” memberikan makna yang berbeda, yaitu:

1. Jika kamu melihat ada sepeda putih di garasi rumah, maka kamu tahu bahwa paman ada di sini (berkunjung ke rumah), dan
2. Jika kamu melihat paman di rumah, maka kamu tahu bahwa pasti ada sepeda putih di garasi rumah.

Kondisi demikian dapat direpresentasikan sebagai $s \leftrightarrow p$, dengan tanda panah ganda yang berarti sudah dapat dipastikan bahwa sepeda putih menyiratkan paman dan paman menyiratkan sepeda putih (Zegarelli, 2007). Makna tersebut mengarahkan kita ke pemahaman biimplikasi.

Bentuk $p \leftrightarrow q$ (*p* jika dan hanya jika *q*) merupakan bentuk pernyataan bikondisional (***biconditional statement***) atau **biimplikasi** atau **ekuivalensi** (***equivalence***). Biimplikasi $p \leftrightarrow q$ menggambarkan implikasi dua arah, yakni $(p \rightarrow q)$ dan $(q \rightarrow p)$. Kondisi inilah yang membedakan biimplikasi dengan implikasi, sekaligus menjadi ekuivalensi untuk biimplikasi itu sendiri, artinya nilai kebenaran $p \leftrightarrow q$ sama dengan $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$, seperti yang dibuktikan pada Tabel 5.4.

Tabel 5.4 Tabel Kebenaran

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
B	B	**B**	B	B	**B**
B	S	**S**	S	B	**S**
S	B	**S**	B	S	**S**
S	S	**B**	B	B	**B**

Nilai kebenaran biimplikasi dapat dilihat pada Tabel 5.3. Biimplikasi bernilai benar hanya jika dua proposisinya memiliki nilai yang sama (keduanya bernilai benar atau keduanya bernilai salah). Adapun cara-cara untuk menyatakan biimplikasi $p \leftrightarrow q$ (Bhoi, 2018), di antaranya sebagai berikut:

- *p* jika dan hanya jika *q* (*p if and only if q*)
- *p* jhj *q* (*"jhj" adalah singkatan dari jika dan hanya jika*) (*p iff q*)
- *p* adalah syarat perlu dan cukup untuk *q* (*p is necessary and sufficient for q*)
- jika *p* maka *q*, dan sebaliknya (*if p then q, and conversely*)

Contoh 8 (Bentuk proposisi yang termasuk biimplikasi)

a) Segitiga ABC adalah segitiga sama sisi jika dan hanya jika ketiga sisinya sama panjang.

b) Jika bayi itu bernapas, maka bayi itu hidup, dan sebaliknya.

Contoh-contoh di atas menerangkan bahwa pernyataan bernilai benar ketika kedua proposisinya benar atau keduanya salah. Apabila proposisi memiliki kebenaran yang berlawanan, maka kenyataannya menjadi salah, seperti pembuktian kemungkinan berikut:

"Bayi itu bernapas jika dan hanya jika bayi itu hidup"

Kemungkinan 1 : bernapas + hidup (benar)

Kemungkinan 2 : bernapas + tidak hidup (salah, karena tidak mungkin)

Kemungkinan 3 : tidak bernapas + hidup (salah, karena tidak mungkin)

Kemungkinan 4 : tidak bernapas + tidak hidup (benar)

Contoh 9

Tuliskan setiap proposisi berikut ke dalam bentuk "*p* jika dan hanya jika *q*".

a) Jika kamu memiliki uang puluhan atau ratusan juta, maka kamu bisa membeli tas *branded*, begitu sebaliknya.

b) Syarat cukup dan perlu agar Anda memiliki badan yang ideal adalah Anda rutin berolahraga.

Solusi:

a) Kamu bisa membeli tas *branded* jika dan hanya jika kamu memiliki uang puluhan atau ratusan juta.

b) Anda memiliki badan yang ideal jika dan hanya jika Anda rutin berolahraga.

Contoh 10

Nyatakan kalimat-kalimat di bawah ini dalam bentuk simbolik:

a) Alvin mendapatkan predikat Cumlaude jika dan hanya jika ia mendapatkan IPK di atas 3,75.

b) Syarat cukup dan perlu agar adik senang adalah adik dibelikan mainan dan bermain bersama ibu.

c) Rasya tidak berangkat sekolah jika dan hanya jika tidak mendapatkan uang saku.

Solusi:

a) Misalkan,

   p : Alvin mendapatkan predikat Cumlaude

q : Alvin mendapatkan IPK di atas 3,75

Jadi, bentuk simboliknya adalah $p \leftrightarrow q$.

b) Misalkan,

p : Adik senang

q : Adik dibelikan mainan

r : Adik bermain bersama ibu

Jadi, bentuk simboliknya adalah $p \leftrightarrow (q \wedge r)$.

c) Misalkan,

p : Rasya berangkat ke sekolah

q : Rasya mendapatkan uang saku

Jadi, bentuk simboliknya adalah $\sim p \leftrightarrow \sim q$.

Latihan Soal

1. Nyatakan kalimat-kalimat di bawah ini dalam bentuk simbolik:
    a) Rina mendapatkan hadiah jika dan hanya jika mendapat peringkat tiga besar di kelas.
    b) Tidak benar bahwa Rasya berangkat ke sekolah jika dan hanya jika mendapat uang saku.
    c) Fiona pergi ke bioskop hanya jika ada film animasi yang sedang tayang.
    d) Jika hasilnya menjadi eror, maka ada simbol yang belum ditulis atau ada nama variabel yang salah ketik.
    e) Syarat cukup agar x menjadi bilangan ganjil adalah x adalah bilangan prima.
    f) Azka tidak diperbolehkan masuk ke kelas bilamana ia telat datang ke sekolah.
    g) Jika ayah setuju, ibu tidak setuju, dan jika ayah tidak setuju, ibu juga tidak setuju.

2. Diketahui:

    p : persegi adalah suatu persegi panjang

    q : 2 + 3 = 6

    r : Bilangan 2 merupakan bilangan prima

    s : kerucut adalah suatu prisma

Tuliskan komposisi pernyataan di bawah ini dengan kalimat, kemudian tentukan nilai kebenarannya.

a) $p \rightarrow q$

b) $p \rightarrow r$

c) $(p \wedge s) \rightarrow r$

d) $p \leftrightarrow \sim s$

3. Suatu hotel memiliki beberapa standar yang dapat dimisalkan sebagai berikut:

    p : pelayanannya baik

q : fasilitasnya lengkap

r : tarifnya mahal

Nyatakan proposisi-proposisi berikut ke dalam bentuk simbolik:

a) Tarifnya mahal, tapi pelayanannya buruk.
b) Tidak benar bahwa fasilitasnya lengkap dan pelayanannya baik jika tarifnya murah.
c) Jika fasilitasnya lengkap, maka tarifnya mahal, dan sebaliknya.
d) Jika tarifnya murah, maka fasilitasnya tidak lengkap atau pelayanannya buruk.

Daftar Pustaka

Bhoi, S. B. (2018). *A Text Book of Logic and Sets: Skill Enhancement Course CBCS Pattern*. Dwarka: Educreation Publishing.

Enderton, H. B. (2001). *A Mathematical Introduction to Logic, Second Edition*. Burlington: Harcourt Academic Press.

Epstein, R. L. (2011). *Classical Mathematical Logic, The Semantic Foundations of Logic*. Princeton: Princeton University Press.

Gregory, H. (2015). *Language and Logics*. Edinburgh, United Kingdom: Edinburgh University Press.

Kneebone, G. T. (1963). *Mathematical Logic and the Foundations of Mathematics, An Introductory Survey*. The University of California: Van Nostrand.

Kunen, K. (2012). *Studies in Logic, Mathematical Logic and Foundations, Volume 19, The Foundation of Mathematics*. London: College Publications.

Mendelson, E. (2015). *Textbooks in Mathematics, Introduction to Mathematical Logic, Sixth Edition*. Boca Raton: CRC Press.

Siang, J. J. (2014). *Logika Matematika, Soal dan Penyelesaian Logika, Himpunan, Relasi, Fungsi*. Yogyakarta: Penerbit ANDI.

Wolf, R. S. (2005). *A Tour through Mathematical Logic.* Washington, DC: The Mathematical Association of America.

Zegarelli, M. (2007). *Logic for Dummies*. Hoboken, NJ: Wiley Publishing, Inc.

Profil Penulis

Ayunda Sriwahyuningrum, M.Pd

Penulis lahir di Belawan, Sumatera Utara, pada tahun 1992. Ketertarikan penulis terhadap matematika sejak di bangku sekolah menjadikan penulis aktif untuk mendalaminya melalui pendidikan S-1 program studi Pendidikan Matematika di Universitas Negeri Jakarta, tahun 2010-2014. Penulis turut melanjutkan pendidikan S-2 tahun 2015-2017 pada program studi Pendidikan Matematika di Universitas Pendidikan Indonesia, Bandung. Sejak tahun 2018, penulis bekerja sebagai dosen di Universitas Indraprasta PGRI Jakarta, mengampu mata kuliah matematika dan statistika. Penulis juga aktif menjadi pelatih lomba bidang matematika untuk tingkat Sekolah Dasar dan Sekolah Menengah Pertama.

Ketertarikan penulis terhadap matematika mengantarkan penulis untuk berkontribusi pada penelitian-penelitian dengan metode kualitatif di bidang Pendidikan Matematika, terutama yang berkaitan dengan pembelajaran matematika di sekolah menengah hingga universitas dan pengembangan desain pembelajaran matematika. Hasil dari penelitian yang telah dilakukan telah banyak dipublikasikan pada prosiding terindeks scopus hingga jurnal terakreditasi. Penulis turut mengembangkan tulisan di dalam buku-buku matematika, seperti buku Kalkulus dan Aljabar, sejak tahun 2022.

Email Penulis: ayunda.sriwahyu@gmail.com

6

LOGIKA PROPOSISI LANJUT

Hersiyati Palayukan
Universitas Kristen Indonesia Toraja

Berdasarkan nilai kebenaran dari suatu proposisi majemuk, maka dapat dibedakan atas 3 bentuk: 1) Tautologi adalah suatu proposisi yang selalu bernilai benar untuk semua kemungkinan kombinasi nilai kebenaran proposisi peyusunnya. 2) Kontradiksi adalah suatu proposisi yang selalu bernilai salah untuk semua kemungkinan kombinasi nilai kebenaran proposisi peyusunnya. 3) Kontingensi adalah suatu proposisi yang bukan tautologi dan kontradiksi. Berikut penjelasan lebih lanjut untuk ketiga bentuk nilai kebenaran pernyataan tersebut.

Tautologi

Definisi:
Sebuah pernyataan majemuk disebut tautologi jika pernyataan tersebut selalu bernilai benar untuk semua nilai yang mungkin dari pernyataan-pernyataan komponennya**.** (Hamilton, 1988)

Tautologi dalam logika proposisi matematika adalah suatu pernyataan atau rumusan yang **selalu Benar/True (B/T)** (Gallier, 2011), tidak tergantung pada nilai kebenaran dari komponen-komponen proposisi yang ada di dalamnya. Artinya, tautologi akan selalu bernilai benar, tidak peduli bagaimana nilai kebenaran proposisi-proposisi yang ada di dalamnya (Copi et al., 2014). Tautologi merupakan bentuk argumen yang sangat kuat dan tidak dapat digugat kebenarannya.

Dalam logika proposisi matematika, tautologi dapat dinyatakan sebagai konsekuensi logis dari proposisi-proposisi dasar atau aksioma yang diterima sebagai benar tanpa harus dibuktikan lebih lanjut (Ramsey, 1926). Tautologi juga dikenal sebagai bentuk yang "selalu benar" atau "benar dalam semua kasus".

Contoh pernyataan tautologi:

1. "Anda akan mengantuk atau tidak mengantuk." $(P \vee \sim P)$. Pernyataan ini merupakan tautologi karena dalam logika proposisi, P atau $\sim P$ (P atau bukan P) selalu benar. Tidak peduli apakah P benar atau salah, $P \vee \sim P$ akan selalu bernilai benar.
2. "Jika hujan, maka jalanan basah." $(H \Rightarrow B)$. Pernyataan ini merupakan tautologi karena dalam logika proposisi, implikasi antara dua proposisi yang benar selalu benar. Jadi, jika proposisi H (hujan) benar, dan proposisi B (jalanan basah) benar, maka $H \Rightarrow B$ akan selalu benar.
3. "$(A \vee B) \wedge \sim A \Rightarrow B$" [(A atau B) dan (bukan A) mengakibatkan B] Pernyataan ini merupakan tautologi karena dalam logika proposisi, suatu pernyataan dan bukan pernyataan benar akan selalu mengakibatkan pernyataan yang kedua benar. Dalam hal ini, jika A atau B benar, dan bukan A benar, maka B akan selalu benar.

Contoh pernyataan *bukan* tautologi:

1. "Hari ini adalah Senin atau cuaca cerah." $(H \vee C)$ Pernyataan ini bukan tautologi karena nilai kebenarannya tergantung pada nilai kebenaran dari proposisi H (Hari ini adalah Senin) dan C (cuaca cerah). Jika proposisi-proposisi ini bernilai salah, maka pernyataan ini bisa bernilai salah.
2. "Jika $x = 5$, maka $x > 10$." $(x = 5 \Rightarrow x > 10)$ Pernyataan ini bukan tautologi karena dalam logika proposisi, implikasi antara dua proposisi yang salah bisa bernilai benar. Dalam hal ini, jika $x = 5$ bernilai benar, tetapi $x > 10$ bernilai salah, sehingga pernyataan ini bisa bernilai benar atau salah, tergantung pada nilai x.

Contoh:

Menggunakan tabel kebenaran, tunjukkan bahwa pernyataan $q \Rightarrow (p \vee q)$ adalah tautologi.

Penyelesaian:

Tabel kebenaran implikasi $q \Rightarrow (p \vee q)$ yaitu:

P	q	$p \vee q$	$q \Rightarrow (p \vee q)$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	T

Oleh karena semua baris pada kolom $q \Rightarrow (p \vee q)$ bernilai T, maka $q \Rightarrow (p \vee q)$ merupakan tautology.

Contoh:

p ∨ ~(p ∧ q) adalah sebuah **tautologi**

p	q	p ∧ q	~(p ∧ q)	p ∨ ~(p ∧ q)
T	T	T	F	T
T	F	F	T	T
F	T	F	T	T
F	F	F	T	T

Contoh:
Menggunakan tabel kebenaran, tunjukkan bahwa pernyataan-pernyataan berikut adalah tautologi.

a) $(p \wedge q) \Rightarrow p$

b) $((p \vee q) \wedge \neg p) \Rightarrow q$

Penyelesaian:
a) Tabel Kebenaran

$$(p \wedge q) \Rightarrow p$$

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \Rightarrow p$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	T

b) Tabel Kebenaran $((p \vee q) \wedge \neg p) \Rightarrow q$

p	q	$p \vee q$	$\neg p$	$(p \vee q) \wedge \neg p$	$((p \vee q) \wedge \neg p) \Rightarrow q$
T	T	T	F	F	T
T	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	T
F	F	F	T	F	T

Kontradiksi

Definisi:
Sebuah pernyataan majemuk disebut kontradiksi jika pernyataan tersebut selalu bernilai salah untuk semua nilai yang mungkin dari pernyataan-pernyataan komponennya. (Hamilton, 1988)

Kontradiksi dalam logika proposisi matematika adalah suatu pernyataan atau rumusan yang **selalu Salah/False (S/F)** (Gallier, 2011), tidak tergantung pada nilai kebenaran dari komponen-komponen proposisi yang ada di dalamnya. Artinya, kontradiksi akan selalu bernilai salah, tidak peduli bagaimana nilai kebenaran proposisi-proposisi yang ada di dalamnya (Copi et al., 2014). Kontradiksi merupakan bentuk argumen yang sangat lemah dan tidak dapat diterima kebenarannya.
Dalam logika proposisi matematika, kontradiksi dapat dinyatakan sebagai konsekuensi logis dari proposisi-proposisi dasar atau aksioma yang saling bertentangan atau bertentangan dalam hal nilai kebenarannya (Ramsey, 1926). Kontradiksi juga dikenal sebagai bentuk yang "selalu salah" atau "salah dalam semua kasus".

Contoh pernyataan kontradiksi:
1. "Pagar itu tinggi dan rendah pada saat yang sama." $(P \wedge \sim P)$ Pernyataan ini merupakan kontradiksi karena dalam logika proposisi, suatu pernyataan yang berbenturan dan bertentangan dalam hal nilai kebenarannya tidak dapat diterima sebagai benar. Dalam hal ini, pernyataan bahwa pagar itu tinggi dan rendah pada saat yang sama bertentangan dan selalu salah.
2. "1 = 2 dan 1 ≠ 2." $(1 = 2 \wedge 1 \neq 2)$ Pernyataan ini merupakan kontradiksi karena dalam logika proposisi, pernyataan yang bertentangan dalam hal nilai kebenarannya selalu salah.

Dalam hal ini, pernyataan bahwa $1 = 2$ dan $1 \neq 2$ bertentangan dan selalu salah.

3. "$(A \vee \sim A) \wedge (B \wedge \sim B)$" [(A atau bukan A) dan (B dan bukan B)] Pernyataan ini merupakan kontradiksi karena dalam logika proposisi, suatu pernyataan dan pernyataan yang bertentangan dalam hal nilai kebenarannya tidak dapat diterima sebagai benar. Dalam hal ini, pernyataan bahwa A atau bukan A dan B dan bukan B bertentangan dan selalu salah.

Contoh:

Menggunakan tabel kebenaran, tunjukkan bahwa pernyataan $p \wedge (\sim p \wedge q)$ adalah kontradiksi.

Penyelesaian:

Tabel kebenaran pernyataan kontradiksi $p \wedge (\sim p \wedge q)$:

p	q	-p	-p ∧ q	p ∧ (-p ∧ q)
T	T	F	F	F
T	F	F	F	F
F	T	T	T	F
F	F	T	F	F

Contoh:

(p ∧ q) ∧ ~(p ∨ q) adalah sebuah **kontradiksi**

p	q	p ∧ q	p ∨ q	~(p ∧ q)	(p ∧ q) ∧ ~(p ∧ q)
T	T	T	T	F	F
T	F	F	T	T	F
F	T	F	T	T	F
F	F	F	F	T	F

Contoh:

Menggunakan tabel kebenaran, tunjukkan bahwa pernyataan-pernyataan berikut adalah kontradiksi.

a) $p \wedge \neg p$

b) $(p \wedge q) \wedge \neg p$

Penyelesaian:

a) Tabel Kebenaran $p \wedge \neg p$

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
T	F	F
T	F	F
F	T	F
F	T	F

b) Tabel kebenaran $(p \wedge q) \wedge \neg p$

p	q	$p \wedge q$	$\neg p$	$(p \wedge q) \wedge \neg p$
T	T	T	F	F
T	F	F	F	F
F	T	F	T	F
F	F	F	T	F

Kontigensi

Definisi:

Kontingensi (contingency) adalah sebuah pernyataan majemuk yang dapat bernilai benar atau salah, bergantung pada nilai-nilai kebenaran dari variabel-variabel pernyataannya (Hamilton, 1988).

Kontingensi dalam logika proposisi matematika adalah suatu pernyataan atau rumusan yang bukan tautologi dan kontradiksi dan tidak dapat dikategorikan sebagai benar atau salah secara pasti, karena nilai kebenarannya tergantung pada nilai kebenaran dari komponen-komponen proposisi yang ada di dalamnya dan konteks yang diberikan (Copi et al., 2014). Artinya, kontingensi akan memiliki nilai kebenaran yang beragam (benar (True) dan salah (False)) tergantung pada situasi atau kondisi tertentu (Gallier, 2011)

Dalam logika proposisi matematika, kontingensi dapat dinyatakan sebagai suatu pernyataan yang dapat menjadi benar atau salah tergantung pada nilai kebenaran dari proposisi-proposisi dasar yang ada di dalamnya (Ramsey, 1926). Kontingensi juga dikenal sebagai bentuk yang "tidak pasti" atau "bergantung pada situasi".

Contoh pernyataan kontingensi:

1. "Hari ini mungkin hujan atau mungkin tidak." $(R \vee \sim R)$ Pernyataan ini merupakan kontingensi karena nilai kebenarannya tergantung pada situasi aktual, apakah hari ini benar-benar hujan atau tidak. Jika hari ini hujan, pernyataan ini akan benar, tetapi jika tidak hujan, pernyataan ini akan salah.
2. "Saya akan belajar matematika hari ini, kecuali jika ada acara penting." $(M \Rightarrow \sim A)$ Pernyataan ini merupakan kontingensi karena nilai kebenarannya tergantung pada apakah ada acara penting atau tidak. Jika ada acara penting, pernyataan ini akan salah, tetapi jika tidak ada acara penting, pernyataan ini akan benar.
3. "Jika cuaca cerah, maka saya akan pergi bersepeda." $(C \Rightarrow P)$ Pernyataan ini merupakan kontingensi karena nilai kebenarannya tergantung pada cuaca. Jika cuaca cerah, pernyataan ini akan benar, tetapi jika cuaca tidak cerah, pernyataan ini akan salah.

Contoh:

Menggunakan tabel kebenaran, tunjukkan bahwa pernyataan-pernyataan berikut adalah kontingensi.

a) $p \Rightarrow (q \wedge p)$

b) $(p \Rightarrow q) \wedge (p \vee q)$

Penyelesaian:

a) $p \Rightarrow (q \wedge p)$

p	q	$q \wedge p$	$p \Rightarrow (q \wedge p)$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	F	T
F	F	F	T

b) $p \Rightarrow (q \wedge p)$

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \vee q$	$(p \Rightarrow q) \wedge (p \vee q)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	T	T
F	F	T	F	F

Contoh:

Tunjukkan apakah pernyataan berikut ini tautologi, kontradiksi atau kontingensi.

1. $(p \vee q) \vee [(\neg p) \wedge (\neg q)]$
2. $(p \vee q) \wedge [(\neg p) \wedge (\neg q)]$
3. $[(p \wedge q) \Rightarrow r] \Rightarrow p$

Penyelesaian:

1. Tabel kebenaran pernyataan $(p \vee q) \vee [(\neg p) \wedge (\neg q)]$

p	q	~p	~q	(p∨q)	(~p∧~q)	(p∨q)∨(~p ∧ ~q)
T	T	F	F	T	F	T
T	F	F	T	T	F	T
F	T	T	F	T	F	T
F	F	T	T	F	T	T

Karena $(p \vee q) \vee [(\neg p) \wedge (\neg q)]$ selalu ber-nilai BENAR/TRUE untuk setiap nilai p dan q maka $(p \vee q) \vee [(\neg p) \wedge (\neg q)]$ disebut dengan TAUTOLOGI.

2. Tabel kebenaran pernyataan $(p \vee q) \wedge [(\neg p) \wedge (\neg q)]$

p	q	~p	~q	(p∨q)	(~p∧~q)	(p∨q) ∧(~p ∧ ~q)
T	T	F	F	T	F	F
T	S	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	T	T	F	T	F

Karena $(p \vee q) \wedge [(\neg p) \wedge (\neg q)]$ selalu bernilai SALAH/FALSE untuk setiap nilai p dan q maka $(p \vee q) \wedge [(\neg p) \wedge (\neg q)]$ disebut dengan KONTRADIKSI.

3. Tabel kebenaran pernyataan $[(p \wedge q) \Rightarrow r] \Rightarrow p$:

P	Q	R	(P∧Q)	[(P∧Q)⇒R]	[(P∧Q)⇒R]⇒P
T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	T
T	F	T	F	T	T
T	F	F	F	T	T
F	T	T	F	T	F
F	T	F	F	T	F
F	F	T	F	T	F
F	F	F	F	T	F

Karena $[(p \wedge q) \Rightarrow r] \Rightarrow p$ bisa bernilai BENAR/TRUE atau SALAH/FALSE untuk setiap nilai p dan q maka pernyataan $[(p \wedge q) \Rightarrow r] \Rightarrow p$ disebut dengan KONTINGENSI.

Daftar Pustaka

Copi, I. M., Cohen, C., & McMahon, K. (2014). Introduction to Logic. ed. *Harlow: Pearson Education Limited*.

Gallier, J. (2011). *Discrete mathematics*. Springer Science & Business Media.

Hamilton, A. G. (1988). *Logic for mathematicians*. Cambridge University Press.

Ramsey, F. P. (1926). Mathematical logic. *The Mathematical Gazette*, *13*(184), 185–194.

Profil Penulis

Dr. Hersiyati Palayukan, M.Pd

Lahir di Samarinda, 15 Oktober 1990. Penulis menempuh Pendidikan Sekolah Menengah Atas di SMA Negeri 1 Makale dan lulus pada tahun 2008. Penulis mulai mendalami ketertarikannya pada Bidang pendidikan matematika dengan menempuh Pendidikan Sarjana di Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Kristen Indonesia Toraja (UKI Toraja) dan lulus pada tahun 2012. Pada tahun berikutnya Penulis melanjutkan studi di Pascasarjana Universitas Negeri Makassar (UNM) pada Program Studi Pendidikan Matematika dan lulus S2 pada tahun 2015. Selanjutnya penulis melanjutkan studi ke jenjang doktoral di Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Negeri Malang (UM) dan menyelesaikan studi S3 pada tahun 2022.

Penulis merupakan Dosen tetap dan saat ini aktif mengajar pada Program Studi Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Kristen Indonesia Toraja. Sesuai Bidangnya, penulis aktif melakukan penelitian pada Bidang Pendidikan Matematika. Beberapa penelitian yang terfokus pada perangkat pembelajaran, aplikasi, dan proses berfikir sehubungan dengan matematika telah dipublikasi pada Jurnal ilmiah baik Nasional maupun Internasional.

Email Penulis: hersiyati@ukitoraja.ac.id

7

EKUIVALENSI

Indah Lestari
Universitas Indraprasta PGRI

Ekuivalensi

Konsep ekuivalensi atau kesetaraan dalam logika matematika digunakan untuk menyatakan hubungan antara pernyataan majemuk. Dua buah pernyataan atau proposisi majemuk dapat dikombinasikan dalam berbagai cara dan terkadang akan ditemukan kombinasi yang menghasilkan nilai kebenaran yang sama. Pernyataan dengan nilai kebenaran yang sama disebut sebagai pernyataan yang ekuivalen secara logika dan didefinisikan sebagai berikut:

Menurut Munir (2010), "Dua buah proposisi majemuk, P(p, q, ..) dan Q(p, q, ..) disebut equivalen secara logika, dinotasikan P(p, q, ..) ≡ Q(p, q, ..) jika keduanya mempunyai tabel kebenaran yang identik."

Dua kalimat disebut ekuivalen logis bila dan hanya bila keduanya mempunyai nilai kebenaran yang sama untuk semua substitusi nilai kebenaran masing-masing pada pernyataan penyusunnya. Jika p dan q adalah pernyataan-pernyataan yang ekuivalen maka dinotasikan $p \equiv q$ atau $p \leftrightarrow q$, Jika $p \equiv q$ maka $q \equiv p$ (Siang, 2014). Pernyataan yang saling ekuivalen dapat dijumpai dalam bahasan logika matematika, pernyataan yang mungkin terlihat berbeda tetapi jika mempunyai tabel kebenaran yang sama, maka dua pernyataan majemuk itu ekuivalen.

Contoh 7.1

Perhatikan pernyataan *Saya mampu menyelesaikan soal logika matematika*. Selanjutnya perhatikan pernyataan *Saya bukan tidak mampu menyelesaikan soal logika matematika*. Kedua pernyataan tersebut terlihat berbeda, namun sebenarnya memiliki nilai kebenaran yang sama. Misalkan p : Saya mampu menyelesaikan soal logika matematika

~ p : Saya tidak mampu menyelesaikan soal logika matematika

Maka pernyataan *saya bukan tidak mampu menyelesaikan soal logika matematika* dapat dinyatakan dalam notasi ~(~ p) = p, maka terbukti kedua pernyataan ekuivalen.

Untuk membuktikan ekuivalen dari pernyataan-pernyataan majemuk dapat digunakan tabel kebenaran, untuk dapat membuat table kebenaran, pernyataan majemuk dapat diubah ke dalam bentuk ekspesi logika. Pernyataan p dan q ekuivalen secara logis jika p ↔ q adalah tautology**,** Jika dua buah ekspresi logika tautologi atau kontradiksi, maka kedua ekspresi logika tersebut ekuivalensi logis, sedangkan pada kontingensi, ekspresi logika disebut ekuivalen logis jika memiliki urutan yang sama (Soesianto & Djoni Dwijono, 2013)

Contoh 7.2

Pada pernyataan majemuk: *Jika saya giat belajar maka saya bisa mengerjakan soal* dan *Jika saya tidak bisa mengerjakan soal maka saya tidak giat belajar*. Dua pernyataan tersebut merupakan bentuk ekuivalen pernyataan majemuk. Untuk membuktikannya dengan menggunakan tabel kebenaran.

Misalkan

p : saya giat belajar

q : saya bisa mengerjakan soal

p →q : Jika saya giat belajar maka saya bisa mengerjakan soal

~q →~p : Jika saya tidak bisa mengerjakan soal maka saya tidak giat belajar

Dengan menggunakan tabel kebenaran pada table 7.1 akan dibuktikan keekuivalenan dari dua pernyataan majemuk diatas.

Tabel 7.1 Tabel kebenaran

p	q	~p	~q	p→q	~q→~p
B	B	S	S	B	B
B	S	S	B	S	S
S	B	B	S	B	B
S	S	B	B	B	B

Berdasarkan tabel 7.1 terlihat bahwa nilai kebenaran pada kolom p→q dan ~q→~p adalah ekspresi logika yang kontingensi , tetapi memiliki urutan yang sama atau memiliki nilai kebenaran yang sama maka kedua pernyataan majemuk diatas adalah ekuivalen.

Pada pernyataan majemuk dimungkinkan ditemukan lebih dari satu pernyataan yang ekivalen. Perhatikan kembali pada pernyataan majemuk *Jika saya giat belajar maka saya bisa mengerjakan soal*. Bentuk ekuivalen dari pernyataan majemuk tersebut adalah *Jika saya tidak bisa mengerjakan soal maka saya tidak giat belajar*. Selain itu, terdapat bentuk ekuivalen lain untuk pernyataan majemuk tersebut yaitu *Saya tidak bisa mengerjakan soal atau saya giat belajar.* Untuk membuktikannya kita bisa membuat kembali tabel kebenaran. Tabel 7.2 adalah table kebenaran untuk membuktikannya.

p : saya giat belajar

q : saya bisa mengerjakan soal

p →q : Jika saya giat belajar maka saya bisa mengerjakan soal

~q →~p : Jika saya tidak bisa mengerjakan soal maka saya tidak giat belajar

~q ∨ p : Saya tidak bisa mengerjakan soal atau saya giat belajar

Tabel 7.2. Tabel kebenaran

p	q	~p	~q	p→q	~q→~p	~q ∨ p
B	B	S	S	B	B	B
B	S	S	B	S	S	S
S	B	B	S	B	B	B
S	S	B	B	B	B	B

Berdasarkan table 7.2 ditunjukkan bahwa ketiga pernyataan majemuk memiliki nilai kebenaran yang sama, maka ketiganya adalah pernyataan yang ekivalen. Hal ini menunjukkan bahwa sebuah pernyataan majemuk dapat memiliki beberapa kemungkinan pernyataan yang ekuivalen.

Contoh 7.3

Perhatikan pernyataan berikut:

(1) Qiana tidak sombong atau dia baik hati

(2) Adalah tidak benar jika qiana sombong dan tidak baik hati

Secara intuitif dapat diduga bahwa kedua pernyataan sama atau ekuivalen walau memiliki susunan kalimat berbeda, tetapi untuk membuktikannya dapat digunakan tabel kebenaran dengan mengubah perntaan ke bentuk ekspresi logika.

Misalkan

p : Qiana sombong

q : Qiana baik hati

maka diperoleh eksresi logika sebagai berikut :

(1) $\sim p \vee q$

(2) $\sim(p \wedge \sim q)$

Selanjutnya dibuat tabel kebenaran dari ekspresi logika diatas

Tabel 7.3. Tabel kebenaran $\sim p \vee q$ dan $\sim(p \wedge \sim q)$

p	q	~p	~q	p ∧~q	~p∨q	~(p∧~q)
B	B	S	S	S	B	B
B	S	S	B	B	S	S
S	B	B	S	S	B	B
S	S	B	B	S	B	B

Perhatikanlah kedua ekspresi logika diatas memiliki nilai kebenaran yang sama walaupun memiliki nilai B dan S atau bersifat kontingensi, Untuk dapat menyebut kedua pernyataan adalah ekuivalen secara logis dapat dihubungkan dengan operator $\leftrightarrow$, jika diperoleh nilai kebenaran yang tautology maka kedua pernyataan ekuivalen secara logis. Tabel 7.4 adalah tabel kebenaran untuk $\sim p \vee q \leftrightarrow \sim(p \wedge \sim q)$.

Tabel 7.4 tabel kebenaran untuk $\sim p \vee q \leftrightarrow \sim(p \wedge \sim q)$

~p∨q	~(p∧~q)	~p∨q ↔ ~(p∧~q)
B	B	B
S	S	B
B	B	B
B	B	B

Karena nilai kebenaran untuak $\sim p \vee q \leftrightarrow \sim(p \wedge \sim q)$ adalah tautologi maka kedua pernyataan ekuivalensi secara logika.

Ekuivalensi logis dari pernyataan majemuk dapat digunakan untuk memperoleh bentuk lainnya dari sebuah pernyataan majemuk, pada pernyataan dengan bentuk implikasi, dapat ditemukan bentuk lainnya yang disebut konvers, invers dan kontraposisi, ketiganya menggunakan simbol yang sama dengan implikasi yaitu →.

Konvers

Konvers adalah cara mengungkapkan kembali sesuatu proposisi kepada proposisi lain yang semakna dengan cara menukar kedudukan subyek dan predikat pernyataan aslinya. subyek pernyataan pertama menjadi predikat dan predikat menjadi subyek pada proposisi yang baru.

Dengan kata lain konvers adalah kebalikan dari suatu pernyataan implikasi.

Jika $p \rightarrow q$ adalah sebuah implikasi, maka Pernyataan $q \rightarrow p$ disebut konvers dari pernyataan $p \rightarrow q$ (Marsudi, 2010).

Dengan mengunakan tabel kebenaran akan diuktikan hubungan antar konvers dan implikasi. Tabel 7.5 adalah tabel kebenaran untuk konvers dan implikasi.

Tabel 7.5 Tabel kebenaran untuk konvers dan implikasi

p	Q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$
B	B	B	B
B	S	S	B
S	B	B	S
S	S	B	B

Berdasarkan tabel 7.5 terlihat bahwa nilai kebenaran dari $p \rightarrow q$ dan $q \rightarrow p$ berbeda maka implikasi tidak ekuivalen dengan konvers.

Contoh 7.4

Tentukan konvers dari pernyataan berikut:

1. Jika x adalah bilangan genap maka x habis dibagi dua
2. Jika hari ini hujan maka saya ada di rumah
3. Jika ABCD adalah segi empat maka ABCD adalah bujur sangkar

Penyelesaian :

1. Jika x habis dibagi dua maka x adalah bilangan genap
2. Jika saya ada di rumah maka hari ini hujan
3. Jika ABCD adalah bujur sangkar maka ABCD adalah segi empat

Invers

Invers adalah cara mengungkapkan kembali suatu proposisi kepada proposisi lain yang semakna dengan mengontradiksikan subyek dan predikat pernyataan aslinya. Kata lain invers adalah negasi dari suatu pernyataan implikasi.

Jika p →q adalah sebuah implikasi, maka Pernyataan ~p →~q disebut invers dari pernyataan p→q (Marsudi, 2010).

Dengan mengunakan tabel kebenaran akan dibuktikan hubungan antara invers dan implikasi. Tabel 7.6 adalah tabel kebenaran untuk implikasi dan invers.

Tabel 7.6 Tabel kebenaran untuk implikasi dan invers

p	Q	~p	~q	p → q	~p →~q
B	B	S	S	B	B
B	S	S	B	S	B
S	B	B	S	B	S
S	S	B	B	B	B

Berdasarkan tabel 7.6 terlihat bahwa nilai kebenaran dari p →q dan **~p →~q** berbeda maka implikasi tidak ekuivalen dengan konvers.

Contoh 7.5

Tentukan invers dari pernyataan berikut:

1. Jika x adalah bilangan genap maka x habis dibagi dua
2. Jika hari ini hujan maka saya ada di rumah
3. Jika ABCD adalah segi empat maka ABCD adalah bujur sangkar

Penyelesaian:

1. Jika x bukanbilangan genap maka x tidak habis dibagi dua
2. Jika hari ini tidak hujan maka saya tidak ada di rumah
3. Jika ABCD bukan segi empat maka ABCD bukanlah bujur sangkar

Kontraposisi

Kontraposisi dari suatu implikasi merupakan pembalikan bentuk inversnya. Kondisi ini sama dengan bentuk implikasi dari ingkaran konsekuen dan ingkaran antesedennya.

Jika p →q adalah sebuah implikasi, maka Pernyataan ~q →~p disebut kontraposisi dari pernyataan p→q (Marsudi, 2010).

Dengan mengunakan tabel kebenaran akan dibuktikan hubungan antara kontraposisi dan implikasi. Tabel 7.7 adalah tabel kebenaran untuk implikasi dan kontraposisi.

Tabel 7.7 Tabel kebenaran untuk implikasi dan kontraposisi

p	q	~p	~q	p → q	~q →~p
B	B	S	S	B	B
B	S	S	B	S	S
S	B	B	S	B	B
S	S	B	B	B	B

Berdasarkan tabel 7.7 terlihat bahwa nilai kebenaran dari p →q dan ~q →~p sama maka implikasi ekuivalen dengan kontraposisi.

Contoh 7.6

Tentukan kontraposisi dari pernyataan berikut:

1. Jika x adalah bilangan genap maka x habis dibagi dua
2. Jika hari ini hujan maka saya ada di rumah
3. Jika ABCD adalah segi empat maka ABCD adalah bujur sangkar

Penyelesaian :

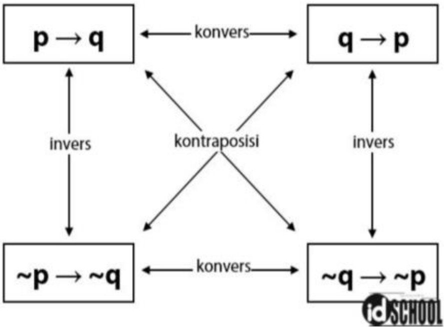
1. Jika x tidak habis dibagi dua maka x bukan bilangan genap
2. Jika saya tidak ada di rumah maka hari ini tidak hujan
3. Jika ABCD bukanlah bujur sangkar maka ABCD bukan segi empat

Berdasarkan uraian diatas bisa dilihat bagaimana hubungan antara implikasi, konvers, invers dan kontraposisi. Tabel 7.8 akan menggambarkan nilai kebenaran untuk implikasi dan bentuk lainnya.

Tabel 7.8 Nilai kebenaran dari implikasi, konvers, invers dan kontraposisi

P	q	~p	~q	Implikasi	Konvers	Invers	Kontraposisi
				$p \to q$	$q \to p$	$\sim p \to \sim q$	$\sim q \to \sim p$
B	B	S	S	B	B	B	B
B	S	S	B	S	B	S	S
S	B	B	S	B	S	S	B
S	S	B	B	B	B	B	B

Berdasarkan tabel 7.8 dapat disimpulkan bahwa konvers ekuivalen dengan invers sementara implikasi ekuivalen dengan kontraposisi. Gambat 7.1 menggambarkan hubungan antara implikasi, konvers dan invers dan kontraposisi.



Sumber ((https://www.facebook.com/idschool.net, 2020)

Gambar 7.1 Hubungan antara implikasi, konvers, invers dan kontraposisi

Contoh 7.7

Tentukan konvers, invers dan kontaposisi dari pernyataan

1. Jika saya mempunyai waktu dan cuaca tidak hujan maka saya akan pergi ke pasar
2. Jika $-2 < 3$ atau $2 + 3 = 5$ maka $\cos \pi = -1$

Penyelesaian :

1. Pada soal ini terdapat 3 pernyataan yaitu

   p : saya mempunyai waktu

   q : cuaca tidak hujan

   r : saya akan pergi ke pasar

   Jika diubah ke bentuk ekspresi logika akan diperoleh bentuk implikasi yaitu $(p \wedge q) \rightarrow r$

   - Konvers : $r \rightarrow (p \wedge q)$ atau dalam bentuk pernyataan yaitu Jika saya pergi kepasar maka saya mempunyai waktu dan cuaca tidak hujan.
   - Invers : $\sim(p \wedge q) \rightarrow \sim r$ atau $\sim p \vee \sim q \rightarrow \sim r$ atau dalam bentuk pernyataan yaitu Jika saya tidak mempunyai waktu atau cuaca hujan maka saya tidak pergi ke pasar.
   - Kontraposisi : $\sim r \rightarrow \sim(p \wedge q)$ atau $\sim r \rightarrow \sim p \vee \sim q$ atau dalam bentuk pernyataan yaitu Jika saya tidak pergi ke pasar maka saya tidak mempunyai waktu atau cuaca hujan.

2. Pada soal ini terdapat 3 pernyataan yaitu

   p : $-2 < 3$

   q : $2 + 3 = 5$

   r : $\cos \pi = -1$

   Jika diubah ke bentuk ekspresi logika akan diperoleh bentuk implikasi yaitu $(p \vee q) \rightarrow r$

   - Konvers : $r \rightarrow (p \vee q)$ atau dalam bentuk pernyataan yaitu Jika $\cos \pi = -1$maka $-2 < 3$ atau $2 + 3 = 5$.
   - Invers : $\sim(p \vee q) \rightarrow \sim r$ atau $\sim p \wedge \sim q \rightarrow \sim r$ atau dalam bentuk pernyataan yaitu Jika $-2 \geq 3$ dan $2 + 3 \neq 5$ maka $\cos \pi \neq -1$.
   - Kontraposisi : $\sim r \rightarrow \sim(p \vee q)$ atau $\sim r \rightarrow \sim p \wedge \sim q$ atau dalam bentuk pernyataan yaitu Jika $\cos \pi \neq -1$maka $-2 \geq 3$ dan $2 + 3 \neq 5$.

Bentuk-Bentuk yang Ekuivalen (Tabel Ekuivalensi Logis)

Bentuk-bentuk yang ekuivalen dapat dibuktikan dengan menggunakan tabel kebenaran, selain menggunakn tabel kebenaran untuk menentukan bentuk yang ekuivalen kita juga dapat menggunakan hukum-hukum ekuivalensi logis yang diturunkan. Tabel 7.9 adalah tabel ekuivalensi logis yang dapat dignakan untuk membuktikan bentuk-bentuk ekuivalen tanpa mengunakan tabel kebenaran.

Tabel 7.9 Tabel Hukum-hukum Ekuivalensi Logis

HUKUM	NAMA
$A \wedge 1 \equiv A$ $\mathbf{A \vee 0 \equiv A}$	Hukum Identitas
$\mathbf{A \vee 1 \equiv 1}$ $A \wedge 0 \equiv 0$	Hukum Dominasi
$\mathbf{A} \vee \sim A \equiv \mathbf{0}$ $A \wedge \sim A \equiv 1$	Hukum Invers
$\mathbf{A \vee A \equiv A}$ $A \wedge A \equiv A$	Hukum Idempoten
$\mathbf{\sim\sim A \equiv A}$	Hukum Negasi Ganda
$A \wedge B \equiv B \wedge A$ $A \vee B \equiv B \vee A$	Hukum Komutatif
$(A \wedge B) \wedge C \equiv \mathbf{A} \wedge (B \wedge C)$ $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$	Hukum Asosiatif
$\mathbf{A} \wedge (B \vee C) \equiv \mathbf{(A} \wedge B) \vee (A \wedge C)$ $\mathbf{A} \vee (B \wedge C) \equiv \mathbf{(A} \vee B) \wedge (A \vee C)$	Hukum Distributif
$\mathbf{A} \wedge (A \vee B) \equiv \mathbf{A}$ $\mathbf{A} \vee (A \wedge B) \equiv \mathbf{A}$	Hukum Absorpsi
$\mathbf{A} \wedge (\sim A \vee B) \equiv \mathbf{A} \wedge B$ $\mathbf{A} \vee (\sim A \wedge B) \equiv \mathbf{(A} \vee B)$	Hukum Absorpsi
$\sim(A \wedge B) \equiv \sim A \vee \sim B$ $\sim(A \vee B) \equiv \sim A \wedge \sim B$	Hukum De Morgan
$\mathbf{(A} \wedge B) \vee (A \wedge \sim B) \equiv \mathbf{A}$	
$A \rightarrow B \equiv \sim A \vee B$	

HUKUM	NAMA
$A \rightarrow B \equiv \sim(A \wedge \sim B)$	
$\mathbf{A} \leftrightarrow B \equiv \mathbf{(A} \wedge B) \vee (\sim A \wedge \sim B)$ $\mathbf{A} \leftrightarrow B \equiv \mathbf{(A} \rightarrow B) \wedge (\sim A \rightarrow \sim B)$	

Sumber : (Soesianto & Djoni Dwijono, 2013)

Contoh 7.9

Buktikanlah apakah pernyataan $(p \vee q) \wedge (\sim p \wedge (\sim p \wedge q))$ ekuivalen dengan $\sim p \wedge q$ menggunakan tabel ekuivalensi logis dan tabel kebenaran !

Penyelesaian :

Dengan hokum-hukum pada tabel ekuivalensi logis

$(p \vee q) \wedge (\sim p \wedge (\sim p \wedge q))$

$\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (\sim p \wedge \sim p) \wedge q)$ Hukum Asosiatif

$\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (\sim p \wedge q)$ Hukum Idempoten

$\Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge q) \wedge (\sim p)$ Hukum Asosiatif

$\Leftrightarrow q \wedge \sim p$ Hukum Absorbsi

$\Leftrightarrow \sim p \wedge q$ Hukum Komutatif

Terbukti bahwa $(p \vee q) \wedge (\sim p \wedge (\sim p \wedge q)) \equiv \sim p \wedge q$

Dengan menggunakan tabel kebenaran

Tabel 7.10 Tabel kebenaran $(p \vee q) \wedge (\sim p \wedge (\sim p \wedge q))$ dan $\sim p \wedge q$

p	Q	~p	~q	p ∨ q	~p ∧ q	~p∧(~p∧q)	(p∨q)∧(~p∧(~p∧q))	~p ∧ q
B	B	S	S	B	S	S	S	S
B	S	S	B	B	S	S	S	S
S	B	B	S	B	B	B	B	B
S	S	B	B	S	S	S	S	S

Berdasarkan tabel 7.10, nilai kebenaran untuk pernyataan $(p \vee q) \wedge (\sim p \wedge (\sim p \wedge q))$ dan $\sim p \wedge q$ bernilai sama maka dapat disimpulkan $(p \vee q) \wedge (\sim p \wedge (\sim p \wedge q)) \equiv \sim p \wedge q$

Latihan Soal

1. Buatlah pernyataan yang ekuivalen dengan pernyataan di bawah ini dan buktikan kebenarannya dengan tabel kebenaran!

   a. Jika saya memiliki cukup uang maka saya akan membeli mobil dan juga motor.

   b. Jika $x^2 = 4$ maka x adalah bilangan real dan x habis dibagi dua.

   c. Jika tikus itu waspada dan bergerak cepat, maka anjing atau kucing tidak mampu menangkapnya.

   d. Jika semua bilangan genap habis dibagi dua, maka 2 aalah bilangan genap dan bilangan prima.

2. Tentukan konvers, invers dan kontraposisi dari pernyataan-pernyat~aan berikut!

   a. Jika anda mengambil mata kuliah logika matematika an tidak memahami konsep ekuivalensi, maka anda tidak lulus mata kuliah tersebut.

   b. Jika n adalah bilangan prima maka n adalah bilangan ganjil atau n = 2

   c. $(A \wedge B) \rightarrow \sim A \vee (\sim A \wedge B)$

   d. $(p \vee q) \wedge \sim p \rightarrow (\sim p \wedge q)$

3. Buktikanlah dengan menggunakan hukum logika tabel ekuivalensi logis dan tabel kebenaran, apakah kedua penyataan di bawah ini ekuivalensi secara logis

   a. $((\sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim r)) \wedge (\sim p \vee q)$ dengan $\sim (p \vee r)$

   b. $\sim (p \vee q) \vee ((\sim p \wedge q) \vee \sim q))$ dengan $\sim (q \wedge r)$

   c. $\sim(p \vee \sim q) \vee (\sim p \wedge \sim q) \Leftrightarrow \sim p$

Daftar Pustaka

Idschool. (2020). *Konvers Invers dan Kontraposisi dari Implikasi | idschool*. https://idschool.net/sma/konvers-invers-dan-kontraposisi-dari-implikasi/

Siang, J.J. (2014). *Logika Matematika Soal & Penyelesaian Logika, Himpunan, Relasi, Fungsi*. Yogyakarta : ANDI OFFSET.

Marsudi. (2010). *Logika & Teori Himpunan*. Malang : UB Press.

Munir, R. (2010). *Matematika Diskrit* (4th ed.). Bandung : Informatika.

Soesianto, F. & Dwijono, D. (2013). *Logika Propoposional*. Yogyakarta: ANDI OFFSET.

Profil Penulis

Indah Lestari, M.Pd

Penulis merupakan dosen tetap Program Studi Pendiidkan Matematika , Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indraprasta PGRI. Penulis lahir pada tanggal 5 September 1986 di Jakarta. Penulis menyelesaikan pendidikan S1 Penulis menyelesaikan Pendidikan S1 di Program Studi Pendidikan Matematika, Fakultas Teknik , Matematika dan IPA, Universitas Indraprasta PGRI pada tahun 2019. Selanjutnya Penulis menyelesaikan Pendidikan S2 di Program Pascasarjana Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,Universitas Indraprasta PGRI pada tahun 2013. Penulis aktif dalam dunia pendidikan dengan mengawali karirnya sebagai dosen pada tahun 2010 sampai dengan saat ini. Penulis aktif sebagai peneliti dibidang kepakaran pendidikan matematika. Beberapa penelitian yang telah dilakukan didanai oleh internal perguruan tinggi dan juga Kemenristek DIKTI selain itu penulis aktif menulis artikel yang terkait dalam perkembangan dunia pendidikan matematika serta aktif dalam menulis buku. Salah-satu buku yang dituliskan oleh penulis adalah buku berjudul “Trigonometri” yang dituliskan dan diterbitkan melalui Unindra Press pada tahun 2019.

Email Penulis: indahlestariunindra5986@gmail.com

8

BENTUK NORMAL

Ni Putu Riska Damayanti
SMA Negeri 5 Denpasar

Bentuk Normal Disjungsi dan Normal Konjungsi

Ekspresi logika mempunyai berbagai bentuk, mulai dari yang rumit sampai dengan yang sederhana. Bentuk yang rumit adalah bentuk dengan banyak jenis perangkai, variabel proposisional, dan tanda kurung, sedangkan bentuk yang sederhana karena hanya memiliki sedikit jenis perangkai, sedikit variabel proposisional, dan tanda kurung sehingga mudah dibaca. (Fahmi, 2021)

Bentuk ekspresi logika yang standar disebut bentuk normal. Bentuk normal dibagi menjadi dua jenis yaitu bentuk normal disjungsi dan bentuk normal konjungsi.

Bentuk Normal ialah bentuk standar untuk ekspresi logika. Semua bentuk ekspresi logika bisa disederhanakan dengan menggunakan perangkai dasar (alamiah), yakni perangkai ¬, ∧ dan ∨, dengan proposisi dasar yang dikomposisikan dalam bentuk rumus atomik atau atom-atom. Literal adalah atom atau negasi dari atom. (Maelani, 2020)

Jadi:

1. A dan ¬A adalah atom atau literal
2. p_2 adalah literal
3. $\neg p_2$ adalah literal
4. Literal yang berisi satu atom disebut literal positif, misal: p_2
5. Literal yang berisi satu negasi dari satu atom disebut literal negatif, misal: $\neg p_2$

Bentuk normal perlu dipahami karena kebanyakan aplikasi logika, misalnya merancang rangkaian elektonika atau sirkuit menggunakan bentuk normal, khususnya bentuk normal disjungsi. Bentuk normal disebut juga kanonikal.

Contoh:

$P = (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg C \vee A)$

$Q = \neg((A \rightarrow B) \wedge \neg(\neg C \vee A))$

Jadi jika P ≡ Q, maka:

$(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg C \vee A) \equiv \neg((A \rightarrow B) \wedge \neg(\neg C \vee A))$

Jadi dapat dipastikan jika $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg C \vee A)$ akan sama nilai kebenarannya dengan $\neg((A \rightarrow B) \wedge \neg(\neg C \vee A))$, dengan semua nilai kebenaran dari A, B, dan C. Dan dapat dibuktikan dengan hukum-hukum logika.

1. Bentuk Normal Konjungtif *(Conjungtive Normal Form* atau *CNF)* adalah bentuk normal yang memakai perangkai konjungsi dari disjungsi.

   Suatu ekspresi logika berbentuk normal konjungtif (CNF) bila ia merupakan konjungsi dari disjungsi literal-literal. Bentuknya seperti berikut:

   $A_1 \wedge A_1 \wedge \ldots\ldots \wedge A_i \wedge \ldots\ldots \wedge A_n$

   Dimana setiap A_i berbentuk:

   $\lambda_1 \vee \lambda_1 \vee \ldots\ldots \vee \lambda_j \vee \ldots\ldots \vee \lambda_m$

   Dimana setiap λ1 berbentuk literal.

   Contoh:

   a. $(p_2 \vee p_5 \vee \neg p_3) \wedge (\neg p_2 \vee p_1 \vee p_3) \wedge (p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee p_7 \vee \neg p_4)$

   b. $(\neg p_1 \vee \neg p_3) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_1 \vee p_3)$

   c. $(p_2 \vee \neg p_3 \vee \neg p_4 \vee p_7) \wedge p_2$

   d. $\neg p_{10}$

   Bentuk CNF pada no 1, 2,3, dan 4 di atas tetap dapat disebut bentuk normal konjungtif.

   Untuk nomor 4 diterima sebagai default.

2. Bentuk Normal Disjungtif (Disjunctive Normal Form atau DNF) adalah bentuk normal yang memakai perangkai disjungsi dari konjungsi.

Suatu ekspresi logika (wff) berbentuk normal konjungtif (CNF) bila ia merupakan konjungsi dari disjungsi literal-literal. Bentuknya seperti berikut:

$$A_1 \vee A_1 \vee \ldots\ldots \vee A_i \vee \ldots\ldots \vee A_n$$

Dimana setiap A_i berbentuk:

$$\lambda_1 \wedge \lambda_1 \wedge \ldots\ldots \wedge \lambda_j \wedge \ldots\ldots \wedge \lambda_m$$

Dimana setiap $\lambda 1$ berbentuk literal.

Contoh:

1. $(p_2 \wedge p_5 \wedge \neg p_3) \vee (\neg p_2 \wedge p_1 \wedge p_3) \vee (p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge p_7 \wedge \neg p_4)$
2. $(\neg p_1 \wedge \neg p_3) \vee (\neg p_2 \wedge \neg p_1 \wedge p_3)$
3. $(p_2 \wedge \neg p_3 \wedge \neg p_4 \wedge p_7) \vee p_2$
4. $\neg p_{10}$

Bentuk CNF pada no 1,2,3, dan 4 di atas tetap dapat disebut bentuk normal kongjungtif.

Untuk nomor 4 diterima sebagai default.

Lalu bagaimanakah membuat tabel kebenaran dari DNF? Untuk membuat DNF dari suatu ekspresi logika yang dibuat dengan tabel kebenaran yaitu

dengan mengambil nilai-nilai T dari ekspresi logika tersebut.

Contoh:

$\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg C)$

Tabel kenarannya:

A	B	C	A∧B	¬(A∧B)	¬A	¬C	¬A∨¬C	¬(A∧B)↔(¬A∨¬C)	
T	T	T	T	F	F	F	F	T	1
T	T	F	T	F	F	T	T	F	X
T	F	T	F	T	F	F	F	F	Y
T	F	F	F	T	F	T	T	T	2
F	T	T	F	T	T	F	T	T	3
F	T	F	F	T	T	T	T	T	4
F	F	T	F	T	T	F	T	T	5
F	F	F	F	T	T	T	T	T	6

Dari tabel kebenaran di atas, hanya mengambil nilai dari ¬(A∧B)↔(¬A∨¬C) yang bernilai T, yakni ada 6. Lihat nomor urut di sisi kanan, kemudian jadikan DNF seperti berikut seperti urutan nomor:

≡ (A∧B∧C)∨(A∧¬B∧¬C)∨(¬A∧B∧C)∨(¬A∧B∧¬C)∨(¬A∧¬B∧C)∨(¬A∧¬B∧¬C)

Bentuk normal di atas disebut ***full disjungtif normal form*** **(FDNF)**.

Sedang untuk CNF sebenanya sama, yakni mengambil nilai F dari tabel kebenaran dan membuatnya menjadi ***full conjungtif normal form*** **(FCNF),** dengan catatan nilai variabel-variabel proposisionalnya terbalik dari pasangan pada tabel kebenaran. T menjadi F dan F menjadi T.

Lihat pada tabel kebenaran pada sisi kanan, yakni ada dua baris X dan Y. Selanjutnya, CNF akan disusun seperti berikut:

≡ (¬A∨¬B∨C)∧(¬A∨B∨¬C)

Teknik di atas pada DNF, sebenarnya menggunakan yang disebut *minterm*, yang menggunakan pasangan variabel proposisional yang berada di tabel kebenaran dan yang memiliki nilai T. ***Minterm*** adalah konjungsi dari literal-literal dengan variabel yang hanya dinyatakan satu kali.

Contoh *minterm*:

1. (A∧B∧C)
2. (¬A∧¬B∧¬C)
3. (¬A∧B∧C)

Contoh bukan *minterm*:

1. (A∧A∧C)
2. (¬A∧¬B∧B)
3. (¬A∧C)
4. B

Pernahkah Anda mendengar kata klausa? Apa yang dimaksud dengan klausa pada bentuk normal?

Pada bentuk CNF, seperti pada definisi, dapat diubah menjadi bentuk berikut:

C1∧C1∧…..∧Ci∧…..∧Cn

Dimana setiap Ci berbentuk:

λ1∨ λ1∨…..∨λj∨…..∨λm

Dimana setiap λj berbentuk literal.

Ci disebut klausa (clause).

Klausa adalah konjungsi dari literal-literal. Setiap klausa dapat berisi sekurangkurangnya satu literal, misalnya A dan ¬A, dan setiap literal disebut klausa unit.

Contoh klausa unit:

1. (p2∧p5∧¬p3)
2. (¬p1∧p3)
3. ¬p2
4. p10

Penyederhanaan Proposisi Majemuk ke Bentuk Normal

Proposisi adalah kalimat deklaratif yang bernilai benar atau salah, tetapi tidak dapat bernilai keduanya sekaligus. Kebenaran atau kesalahan dari sebuah kalimat disebut nilai kebenaran.

Kalimat proposisi dilihat berdasarkan struktur kalimat, maka kalimat proposisi bisa diklasifikasikan dalam dua bentuk yaitu proposisi tunggal dan proposisi majemuk.

Definisi proposisi atomik berisi satu variabel proposisional atau satu konstanta proposisional. Definisi proposisi majemuk berisi minimum satu perangkai, dengan lebih dari satu variabel proposisional. Perangkai logika digunakan untuk mengombinasikan proposisi atomik menjadi proposisi majemuk.

Untuk menghindari kesalahan tafsir maka proposisi majemuk yang akan dikerjakan lebih dahulu diberi tanda kurung sehingga proposisi-proposisi dengan perangkai-perangkai yang berada di dalam tanda kurung disebut *fully parenthesized expression (fpe).* Proposisi yang sangat rumit dapat dipecah menjadi subekspresi-subekspresi. Subekspresi dapat dipecah lagi menjadi subsubekspresi, dan seterusnya. Teknik ini dinamakan Parsing. (Maelani, 2020)

Contoh Proposisi Majemuk:

Jika Dewi rajin belajar, maka ia lulus ujian dan ia mendapat hadiah istimewa.

Pernyataan di atas dapat diubah menjadi variabel proposisional:

A = Dewi rajin belajar

B = Dewi lulus ujian

C = Dewi mendapat hadiah istimewa.

Dalam bentuk ekspresi logika berubah menjadi $A \rightarrow B \wedge C$.

Persoalannya adalah ada dua kemungkinan pengerjaan, yakni $((A \rightarrow B) \wedge C)$ atau $(A \rightarrow (B \wedge C))$ karena kedua kemungkinan tersebut dapat menghasilkan nilai kebenaran yang berbeda.

Ekspresi Logika adalah proposisi-proposisi yang dibangun dengan variabel-variabel logika yang berasal dari pernyataan atau argumen. Setiap ekspresi logika dapat bersifat atomik atau majemuk tergantung dari variabel proposisional yang membentuknya bersama perangkai yang relevan. (Resmawan, 2017)

Lalu bagaimana cara mengubah suatu ekspresi logika menjadi bentuk CNF?

Untuk mengubah suatu ekspresi logika menjadi bentuk CNF, ada 5 langkah yang digunakan, dimana tidak semua langkah harus dipakai, tetapi hanya langkah yang relevan saja, dan tidak harus urut, karena tergantung keadaan.

Langkah-langkah tersebut adalah:

Langkah 1:

Gunakan ekuivalensi A↔B ≡ (A→B)∧(B→A) untuk menghilangkan perangkai ↔

Langkah 2:

Gunakan ekuivalensi A→B ≡ ¬A∨B untuk menghilangkan perangkai →

Langkah 3:

Gunakan hukum De Morgan ¬(A∧B) ≡ ¬A∨¬B dan ¬(A∨B) ≡ ¬A∧¬B untuk mendorong masuk tanda negasi ke dalam tanda kurung agar mendapatkan klausa yang berisi literal.

Langkah 4:

Gunakan hukum negasi ganda ¬¬A ≡ A untuk menghilangkan tanda negasi.

Langkah 5:

Gunakan hukum distributif A∨(B∧C) ≡ (A∨B)∧(A∨C) untuk mengubahnya menjadi CNF

Dualitas adalah kembaran suatu ekspresi. Jika memiliki perangkai ∨ akan diganti ∧, demikian sebaliknya, dan jika bernilai T akan diganti bernilai F, sedemikian sebaliknya.

Contoh:

- A∨¬A ≡ T
- A∧¬A ≡ F

Konsep dualitas berhubungan erat dengan komplementasi dan dengan konsep ini akan dibuat CNF dari tabel kebenaran. Komplemen dapat dibaca sebagai pasangan pelengkapnya. Misalkan, ada ekspresi A, maka komplemen dari A adalah ¬A, demikian sebaliknya.

Contoh:

1. Hilangkan perangkai ↔ dan → dari ekspresi logika berikut ini:

   (A∧¬C) ↔ (B→(A→¬C))

   ≡ (A∧¬C) → (B→(A→¬C)))∧((B→(A→¬C))→(A∧¬C))

   ≡ (¬(A∧¬C)∨(¬B∨(¬A∨¬C)))∧(¬(¬B∨(¬A∨¬C))∨(A∧¬C))

   ≡ ((¬A∨¬¬C)∨(¬B∨(¬A∨¬C)))∧(¬¬B∧¬(¬A∨¬C))∨(A∧¬C))

$\equiv ((\neg A \vee \neg\neg C) \vee (\neg B \vee (\neg A \vee \neg C))) \wedge (\neg\neg B \wedge (\neg\neg A \wedge \neg\neg C)) \vee (A \wedge \neg C))$

$\equiv ((\neg A \vee C) \vee (\neg B \vee (\neg A \vee \neg C))) \wedge (B \wedge (A \wedge C)) \vee (A \wedge \neg C))$

$\equiv ((\neg A \vee C) \vee (\neg B \vee \neg A \vee \neg C)) \wedge (B \wedge (A \wedge C)) \vee (A \wedge \neg C))$

Bentuk logika di atas masih bisa disederhanakan lagi tapi cukup sampai disitu, karena hanya untuk menghilangkan perangkai ↔ dan →.

2. $\neg(A \rightarrow \neg C) \wedge (\neg B \rightarrow C) \equiv \neg(\neg A \vee \neg C) \wedge (\neg\neg B \vee C)$

   $\equiv (\neg\neg A \wedge \neg\neg C) \wedge (\neg\neg B \vee C)$

   $\equiv (A \wedge C) \wedge (B \vee C)$

3. Ubahlah $(\neg A \wedge (\neg B \rightarrow C)) \leftrightarrow D$ menjadi CNF

   $(\neg A \wedge (\neg B \rightarrow C)) \leftrightarrow D \equiv ((\neg A \wedge (\neg B \rightarrow C)) \rightarrow D) \wedge (D \rightarrow (\neg A \wedge (\neg B \rightarrow C)))$

   $\equiv (\neg(\neg A \wedge (\neg\neg B \vee C)) \vee D) \wedge (\neg D \vee (\neg A \wedge (\neg\neg B \vee C)))$

   $\equiv ((\neg\neg A \vee \neg(\neg\neg B \vee C)) \vee D) \wedge (\neg D \vee (\neg A \wedge (\neg\neg B \vee C)))$

   $\equiv ((A \vee \neg(B \vee C)) \vee D) \wedge (\neg D \vee (\neg A \wedge (B \vee C)))$

   $\equiv ((A \vee (\neg B \wedge \neg C)) \vee D) \wedge (\neg D \vee (\neg A \wedge (B \vee C)))$

   $\equiv ((A \vee \neg B) \wedge (A \vee \neg C)) \vee D) \wedge (\neg D \vee \neg A) \wedge (\neg D \vee (B \vee C)))$

   $\equiv ((A \vee \neg B) \vee D) \wedge ((A \vee \neg C) \vee D)) \wedge ((\neg D \vee \neg A) \wedge (\neg D \vee (B \vee C)))$

   $\equiv (A \vee \neg B \vee D) \wedge (A \vee \neg C \vee D)) \wedge ((\neg D \vee \neg A) \wedge (\neg D \vee B \vee C)$

Dualitas adalah kembaran suatu ekspresi. Jika memiliki perangkai ∨ akan diganti ∧,

demikian sebaliknya, dan jika bernilai T akan diganti bernilai F, sedemikian sebaliknya.

Contoh:

- $A \vee \neg A \equiv T$
- $A \wedge \neg A \equiv F$

Konsep dualitas berhubungan erat dengan komplementasi dan dengan konsep ini akan dibuat CNF dari tabel kebenaran. Komplemen dapat dibaca sebagai pasangan pelengkapnya. Misalkan, ada ekspresi A, maka komplemen dari A adalah ¬A, demikian sebaliknya.

Contoh:

Negasikan $P = (A \land B) \lor \neg C$ dengan komplemen

Jawaban:

Langkah 1:

Cari dualitas dari P, yakni: $(A \lor B) \land \neg C$

Hanya mengganti perangkai, tetapi literalnya tidak diubah

Langkah 2:

Lakukan komplementasi dengan mencari komplemennya. Caranya dengan menghapus semua literal dan diganti dngan komplemennya dan menghasilkan $(\neg A \lor \neg B) \land C$

Jika masih ragu, maka pembuktiannya dilakukan dengan cara berikut:

$\neg P \equiv \neg((A \land B) \lor \neg C)$

$\equiv (\neg(A \land B) \land \neg C)$

$\equiv ((\neg A \lor \neg B) \land \neg C)$

$\equiv (\neg A \lor \neg B) \land \neg C$

Dengan kata lain sebenarnya komplementasi adalah negasinya, jika P = A, maka komplemennya $P = \neg A$. jika $P = (A \land B)$, maka komplemennya $P = \neg(A \land B)$ atau $(\neg A \lor \neg B)$ berdasarkan hukum DE Morgan’s. jika ada dua ekspresi logika ekuivalensecara logis maka komplemennya pasti juga ekuivalen secara logis.

Jadi komplementasi adalah penegasian suatu ekspresi dengan memakai komplemennya. Komplementasi dapat digunakan untuk mencari CNF dari suatu eksprei atau fungsi R. Maka buatlah dahulu DNF dari ¬R, jika hasil DNF adalah P, maka $P = \neg R$ dan komplemen dari P adalah negasinya yang pasti ekuivalen secara logis dengan R.

Contoh Soal 1

Tabel kebenaran dari suatu ekspresi atau fungsi R:

	A	B	C	R
1	T	T	T	T
2	T	T	F	T
3	T	F	T	F
4	T	F	F	F
5	F	T	T	T
6	F	T	F	T
7	F	F	T	F
8	F	F	F	T

Berdasarkan tabel tersebut, ¬R adalah bernilai benar atau pada tabel kebenaran di atas adalah pada nilai-nilai F yang berada pada baris 2, 5, dan 6 dengan pasangan nilainya seperti berikut:

Baris-2: A = F B = F C = T

Baris-5: A = T B = F C = F

Baris-6: A = T B = F C = T

Maka ekspresi DNF yang diperoleh adalah:

$(\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C)$

Selanjutnya, lakukan langkah-langkah berikut:

Langkah 1:

Cari dualitasnya, maka hasilnya:

$(\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge (A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (A \vee \neg B \vee C)$

Langkah 2:

Lakukan komplementasi dengan memberi komplemennya pada setiap literalnya, sehingga hasilnya:

$\mathbf{(A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C)}$

Atau boleh dicocokkan dengan melakukan cara menegasi DNF yang diperoleh untuk mendapatkan CNF, yakni:

$\neg((\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C))$

$\equiv (\neg(\neg A \wedge \neg B \wedge C) \wedge \neg(A \wedge \neg B \wedge \neg C) \wedge \neg(A \wedge \neg B \wedge C))$

$\equiv (\neg\neg A \vee \neg\neg B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee \neg\neg B \vee \neg\neg C) \wedge (\neg A \vee \neg\neg B \vee \neg C))$

$\equiv (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C)$

(Resmawan, 2017)

Contoh Soal 2

Ubahlah ekspresi logika $\neg(\neg A \rightarrow B) \vee (A \vee B)$ ke dalam bentuk CNF

Jawab:

$\sim (a \rightarrow b) \vee (a \vee b)$	Bentuk semula
$\sim (\sim a \vee b) \vee (a \vee b)$	Mengganti implikasi
$(a \wedge \sim b) \vee (a \vee b)$	De Morgan
$[(a \wedge \sim b) \vee a] \vee b$	Asosiatif
$[(a \vee a) \wedge (\sim b \vee a)] \vee b$	Distributif
$((a \vee a \vee b) \wedge (\sim b \vee a \vee b)$	CNF

De Morgan : $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$ $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$
Asosiatif $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$ $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$
Distributif $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
Tautologi 1 : $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$

Latihan soal:

1. Ubahlah bentuk-bentuk logika berikut ini menjadi bentuk CNF:

a. $(A \wedge C) \vee (B \wedge C)$

b. $(A \wedge (\neg B \leftrightarrow C)) \rightarrow C$

2. Ubahlah bentuk-bentuk logika berikut ini menjadi bentuk DNF:

a. $\neg((A \wedge B) \vee C) \wedge B$

b. $(A \rightarrow B) \leftrightarrow ((A \rightarrow C) \wedge B)$

3. Ubahlah bentuk-bentuk logika berikut ini menjadi bentuk CNF dan DNF:

a. $A \rightarrow (B \wedge C)$

b. $\neg(((A \vee B) \wedge C) \vee B)$

4. Gunakan tabel kebenaran untuk mendapatkan FDNF dan FCNF dari ekspresi-ekspresi berikut:

a. $(A \vee B) \rightarrow (C \wedge (C \rightarrow A))$

b. $((A \vee B) \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow A)$

Daftar Pustaka

Fahmi, Syariful. (2021). *Logika Matematika dan Himpunan*. Yogyakarta: UAD PRESS (Anggota IKAPI dan APPTI)

Maelani. (2020). *Bentuk Normal Disjungtif dan Konjungtif*. Diakses 27 April 2023 dari https://www.scribd.com/document/453346437/Bentuk-Normal-Konjungtif-dan-disjungtif

Resmawan. (2017). *Pengantar Logika Matematika*. Universitas Negeri Gorontalo

Profil Penulis

Ni Putu Riska Damayanti

Lahir di Denpasar pada bulan Juni 1996. Memulai studi pada bidang pendidikan di tahun 2014 dengan berkuliah di jurusan Pendidikan Matematika IKIP PGRI Bali yang kini telah menjadi Universitas PGRI Mahadewa Indonesia. Pada tahun 2014 penulis sudah menjadi tutor di sebuah bimbingan belajar yang berlokasi di Dalung. Pada tahun 2018 penulis menjadi guru Matematika dan IPA di SMP Pelita Bangsa Denpasar. Pada Desember 2020 penulis diangkat menjadi CPNS dan ditugaskan mengajar SMA Negeri 5 Denpasar sebagai guru Matematika terhitung mulai Januari 2021. Pada tahun 2022 penulis menyelesaikan Pendidikan Profesi Guru (PPG) Dalam Jabatan yang berlokasi di Universitas Pendidikan Ganesha (Undhiksa). Mulai aktif menulis artikel pada jurnal nasional sejak tahun 2023 dimana saat itu penulis telah mengabdi menjadi guru di SMA Negeri 5 Denpasar dan masih aktif menulis artikel sampai saat ini. Penulis sangat tertarik pada dunia pendidikan dan ingin terus mengabdikan diri dan bermanfaat bagi dunia pendidikan.

Email Penulis: damayantiriska2010@gmail.com

9

ATURAN INFERENSI (PENARIKAN KESIMPULAN)

Khairunnisa Fadhilla Ramdhania
Universitas Bhayangkara Jakarta Raya

Misal diberikan suatu himpunan proposisi yang terdiri dari sejumlah premis $P_1, P_2, \dots, P_n$, yang selanjutnya akan kita sebut sebagai **hipotesis**. Kita dapat menarik kesimpulan atau **konklusi** C dari proposisi-proposisi tersebut dan bisa ditulis sebagai berikut:

$$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \dots \wedge P_n \Rightarrow C$$

Proses penarikan kesimpulan ini disebut **inferensi**. Di dalam proses penarikan kesimpulan tentunya terdapat kaidah/aturan inferensi yang akan dijabarkan sebagai berikut (Munir, 2016).

Modus Ponen

Modus ponen atau *law of detachment* merupakan aturan yang bersumber dari tautologi dengan bentuk $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$. Kita dapat katakan bahwa p dan $p \rightarrow q$ adalah hipotesis, sedangkan q adalah konklusi. Modus ponen dapat dinyatakan dalam bentuk simbolik seperti:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

Notasi $\therefore$ digunakan untuk menyatakan hasil akhir dari penarikan kesimpulan dan dibaca "jadi". Dengan kata lain, aturan ini menyatakan jika hipotesis p dan $p \to q$ bernilai benar maka kesimpulan q juga benar.

Contoh 9.1

1. Misal hipotesis "Jika 8 habis dibagi 2, maka 8 adalah bilangan genap" dan "8 habis dibagi 2" keduanya benar. Kita tuliskan dalam bentuk simbolik berikut

   p : 8 habis dibagi 2

   q : 8 adalah bilangan genap

   Maka menurut modus ponen:

   $p \to q$: Jika 8 habis dibagi 2, maka 8 adalah bilangan genap

   p : 8 habis dibagi 2

   $\therefore q$: 8 adalah bilangan genap

2. Misal hipotesis "Jika x adalah bilangan real, maka $\frac{1}{x}$ adalah invers terhadap perkalian" dan "x adalah bilangan real" keduanya benar. Kita tuliskan dalam bentuk simbolik berikut

   p : x adalah bilangan real

   q : $\frac{1}{x}$ adalah invers terhadap perkalian

   Maka menurut modus ponen:

   $p \to q$: Jika x adalah bilangan real, maka $\frac{1}{x}$ adalah invers terhadap perkalian

   p : x adalah bilangan real

   $\therefore q$: $\frac{1}{x}$ adalah invers terhadap perkalian

Modus Tollen

Aturan ini bersumber dari tautologi dengan bentuk $\left((p \to q) \wedge \sim q\right) \to \sim p$, dengan $p \to q$ dan $\sim q$ adalah hipotesis, sedangkan $\sim p$ adalah konklusi. Modus tollen dapat ditulis

$$\begin{array}{r} p \rightarrow q \\ \sim q \\ \hline \therefore \sim p \end{array}$$

Contoh 9.2

1. Misal hipotesis “Jika anda sudah divaksinasi covid, maka anda bisa masuk mall” dan “anda tidak bisa masuk mall” keduanya benar, maka bentuk simboliknya:

   p : anda sudah divaksinasi covid

   q : anda bisa masuk mall

   Maka menurut modus tollen:

   $p \rightarrow q$: Jika anda sudah divaksinasi covid, maka anda bisa masuk mall

   $\sim q$: anda tidak bisa masuk mall

   $\therefore \sim p$: anda belum divaksinasi covid

2. Misal hipotesis “Jika 8 habis dibagi 2, maka 8 adalah bilangan genap” dan “8 habis dibagi 2” keduanya benar. Kita tuliskan dalam bentuk simbolik berikut

   p : 8 habis dibagi 2

   q : 8 adalah bilangan genap

   Maka menurut modus tollen:

   $p \rightarrow q$: Jika 8 habis dibagi 2, maka 8 adalah bilangan genap

   $\sim q$: 8 bukan bilangan genap

   $\therefore \sim p$: 8 tidak habis dibagi 2

Modus Hipotetis (Aturan Transitif)

Aturan ini berdasarkan tautologi yang berbentuk $\big((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)\big) \rightarrow (p \rightarrow r)$. Kali ini kedua hipotesis berbentuk implikasi, yaitu $p \rightarrow q$ dan $q \rightarrow r$. Implikasi $p \rightarrow r$ merupakan konklusi. Modus Hipotetis ini ditulis:

$$\begin{array}{c} p \to q \\ q \to r \\ \hline \therefore p \to r \end{array}$$

Contoh 9.3

1. Misalkan "Jika saya rajin belajar, maka nilai logika matematika saya A" dan "Jika nilai logika matematika saya A, maka saya bisa lulus kuliah tepat waktu". Jika kita nyatakan dalam bentuk simbolik:

   p : saya rajin belajar

   q : nilai logika matematika saya A

   r : saya bisa lulus kuliah tepat waktu

   Maka menurut modus hipotetis:

   $p \to q$: Jika saya rajin belajar, maka nilai logika matematika saya A

   $q \to r$: Jika nilai logika matematika saya A, maka bisa lulus kuliah tepat waktu

   ---

   $\therefore q \to r$: Jika saya rajin belajar, maka saya bisa lulus kuliah tepat waktu

2. Misal hipotesis "Jika 8 habis dibagi 2, maka 8 adalah bilangan genap" dan "Jika 8 bilangan genap, maka 8 dapat dinyatakan dalam bentuk $2n$, dengan $n \in \mathbb{Z}$" keduanya benar. Kita tuliskan dalam bentuk simbolik berikut

   p : 8 habis dibagi 2

   q : 8 adalah bilangan genap

   r : 8 dapat dinyatakan dalam bentuk $2n$, dengan $n \in \mathbb{Z}$

   Maka menurut modus hipotetis:

   $p \to q$: Jika 8 habis dibagi 2, maka 8 adalah bilangan genap

   $q \to r$: Jika 8 bilangan genap, maka 8 dapat dinyatakan dalam bentuk $2n$, dengan $n \in \mathbb{Z}$

   $\therefore q \to r$: Jika 8 habis dibagi 2, maka 8 dapat dinyatakan dalam bentuk $2n$, dengan $n \in \mathbb{Z}$.

Silogisme Disjungtif

Silogisme disjungtif merupakan aturan yang bersumber dari tautologi dengan bentuk $((p \vee q) \wedge \sim p) \rightarrow q$. Kita dapat katakan bahwa $p \vee q$ dan $\sim p$ adalah hipotesis, sedangkan q adalah konklusi. Aturan silogisme disjungtif dapat dinyatakan dalam bentuk simbolik seperti:

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \underline{\sim p \quad} \\ \therefore q \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} p \vee q \\ \underline{\sim q \quad} \\ \therefore p \end{array}$$

Penjumlahan Disjungtif

Aturan ini didasarkan pada tautologi yang berbentuk $p \rightarrow p \vee q$. Secara harfiah, penjumlahan disjungtif ini berdasarkan fakta bahwa suatu proposisi dapat digeneralisasikan dengan operator "$\vee$", karena disjungsi tetap bernilai benar apabila salah satu komponennya bernilai benar (Suraya, 2019). Contohnya, “Gula rasanya manis” bernilai benar. Pernyataan tersebut akan tetap bernilai benar walaupun ditambahkan kalimat yang bernilai salah “Kucing adalah unggas” menjadi “Gula rasanya manis atau kucing adalah unggas”.

Aturan ini dapat ditulis sebagai:

$$\begin{array}{l} \underline{\quad p \wedge q} \\ \therefore p \end{array}$$

Contoh 9.5

1. Misalkan hipotesis “Taslim adalah siswa SMA” bernilai benar. Berdasarkan aturan penjumlahan disjungtif kita dapat menuliskan bahwa “Taslim adalah siswa SMA atau SD”, kalimat tersebut tetap bernilai benar.
2. Misalkan hipotesis “Setelah Hari Jumat adalah Hari Sabtu” bernilai benar. Berdasarkan aturan penjumlahan disjungtif kita dapat menuliskan bahwa “Setelah Hari Jumat adalah Hari Sabtu atau Kamis”

Simplifikasi

Aturan ini didasarkan pada tautologi yang berbentuk $(p \wedge q) \rightarrow p$, dengan p dan q adalah hipotesis, sedangkan p adalah konklusi.

Inferensi ini merupakan kebalikan dari penjumlahan disjungtif. Dengan kata lain, apabila terdapat beberapa kalimat yang dihubungkan dengan operator " $\wedge$ ", maka kalimat tersebut dapat disederhanakan dengan mengambil salah satu kalimat secara khusus. Aturan simplifikasi dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$p \wedge q$$
$$\therefore p$$

Contoh 9.6

1. Misalkan hipotesis "Asti kuliah S1 di Unpad dan S2 di ITB". Berdasarkan aturan simplifikasi dapat kita simpulkan bahwa "Asti kuliah S1 di Unpad". Kesimpulan ini juga benar "Asti kuliah S2 di ITB".
2. Misalkan hipotesis "Setelah Hari Jumat adalah Hari Sabtu dan Minggu". Berdasarkan aturan simplifikasi dapat kita simpulkan bahwa "Setelah Hari Jumat adalah Hari Sabtu". Kesimpulan ini juga benar "Setelah Hari Jumat adalah Hari Minggu".

Konjungsi

Aturan ini didasarkan pada tautologi yang berbentuk $((p) \wedge (q)) \rightarrow (p \wedge q)$. Aturan konjungsi dapat ditulis sebagai:

$$\begin{array}{c} p \\ \underline{q} \\ \therefore p \wedge q \end{array}$$

Contoh 9.7

1. Misalkan hipotesis "Taslim mengambil mata kuliah Matematika Diskrit" dan "Taslim mengulang mata kuliah Algoritma". Dengan menggunakan aturan konjungsi dapat ditulis "Taslim mengambil mata kuliah Matematika Diskrit dan mengulang mata kuliah Algoritma".
2. Misalkan hipotesis "Bekasi Kota Ihsan" dan "Bekasi termasuk Provinsi Jawa Barat". Dengan menggunakan aturan konjungsi dapat ditulis "Bekasi Kota Ihsan dan termasuk Provinsi Jawa Barat".

Tabel Implikasi Logis

Jika kita cermati aturan inferensi yang sudah dibahas sebelumnya, aturan tersebut berdasarkan pada penurunan tautologi implikasi logis, yakni dijabarkan pada Tabel 9.1 berikut.

Tabel 9.1 Implikasi Logis

No.	Bentuk Simbolik	Istilah
1.	$p \Rightarrow (p \vee q)$	Adisi
2.	$(p \wedge q) \Rightarrow p$	Simplifikasi
3.	$(p \rightarrow 0) \Rightarrow \sim p$	Absurditas
4.	$(p \wedge (p \rightarrow q)) \Rightarrow q$	Modus Ponen
5.	$\big((p \rightarrow q) \wedge \sim q\big) \Rightarrow \sim p$	Modus Tollen
6.	$((p \vee q) \wedge \sim p) \Rightarrow q$	Silogisme Disjungtif
7.	$p \Rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q))$	
8.	$\big((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)\big) \Rightarrow (p \rightarrow r)$	Transifitas Implikasi
9.	$\big((p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)\big) \Rightarrow (p \leftrightarrow r)$	Transifitas Biimplikasi
10.	a. $(p \rightarrow q) \Rightarrow \big((p \vee r) \rightarrow (q \vee r)\big)$ b. $(p \rightarrow q) \Rightarrow \big((p \wedge r) \rightarrow (q \wedge r)\big)$ c. $(p \rightarrow q) \Rightarrow \big((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)\big)$	
11.	a. $((p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \Rightarrow \big((p \vee r) \rightarrow (q \vee s)\big)$ b. $((p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \Rightarrow \big((p \wedge r) \rightarrow (q \wedge s)\big)$	Dilema Konstruktif
12.	a. $((p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \Rightarrow \big((\sim q \vee \sim s) \rightarrow (\sim p \vee \sim r)\big)$ b. $((p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \Rightarrow \big((\sim q \wedge \sim s) \rightarrow (\sim p \wedge \sim r)\big)$	Dilema Destruktif

Sumber: (Rachmat, 2004)

Tabel Aturan Inferensi

Bagian ini dirangkum aturan-aturan inferensi yang berdasarkan dari tautologi implikasi logis, serta disajikan dalam bentuk tabel yakni Tabel 9.2.

Tabel 9.2 Aturan Inferensi

No.	Bentuk Simbolik	Istilah
1.	$p \to q$ p ――― $\therefore q$	Modus Ponen
2.	$p \to q$ $\sim q$ ――― $\therefore \sim p$	Modus Tollen
3.	$p \to q$ $q \to r$ ――― $\therefore p \to r$	Modus Hipotetis
4.	$p \vee q$ $\sim p$ ――― $\therefore q$	Silogisme Disjungtif
5.	$p \wedge q$ ――― $\therefore p$	Simplifikasi
6.	p ――― $\therefore p \vee q$	Penjumlahan Disjungtif
7.	p q ――― $\therefore p \wedge q$	Konjungsi

Perlu diingat kembali bahwa dalam penarikan kesimpulan C berdasarkan hipotesis $P_1, P_2, \ldots, P_n$ bahwa P_i merupakan salah satu dari premis, tautologi, atau konsekuensi logis dari premis-premis atau tautologi sebelumnya. Di awal telah dipaparkan pula bentuk umum $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \ldots \wedge P_n \Rightarrow C$ merupakan tautologi yang interpretasinya benar, sehingga dalam proses penarikan kesimpulan kita bukan hanya dapat menggunakan aturan inferensi saja melainkan dapat menggunakan implikasi logis dan tidak mengubah nilai kebenarannya.

Contoh 9.8

Buktikan bahwa $\boldsymbol{s \rightarrow r}$ adalah kesimpulan dari premis $\boldsymbol{p \rightarrow (q \rightarrow r), p \vee \sim s}$, dan $\boldsymbol{q}$!

Penyelesaian: Kita gunakan pembuktian langsung yakni

$$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \ldots \wedge P_n \Rightarrow C$$

dan menggunakan aturan inferensi, ekivalensi logika, serta implikasi logis

Langkah		**Alasan**
1.	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	Premis 1
2.	$p \vee \sim s$	Premis 2
3.	q	Premis 3
4.	$\sim s \vee p$	Langkah 2: Hukum Komutatif
5.	$s \rightarrow p$	Langkah 4: Implikasi
6.	$s \rightarrow (q \rightarrow r)$	Langkah 1 dan 5
7.	$(s \wedge q) \rightarrow r$	Langkah 6: Hukum Eksportasi
8.	$q \rightarrow (s \rightarrow (q \wedge s))$	Tautologi
9.	$s \rightarrow (q \wedge s)$	Langkah 3 & 8: Modus Ponen
10.	$s \rightarrow (s \wedge q)$	Langkah 9: Hukum Komutatif
11.	$s \rightarrow r$	Langkah 7 & 10; Modus Hipotetis

$\therefore$ Terbukti bahwa $s \rightarrow r$ merupakan kesimpulan dari premis $p \rightarrow (q \rightarrow r), p \vee \sim s, q$.

Daftar Pustaka

Munir, R. (2016). *Matematika Diskrit* (6th ed.). Informatika Bandung.

Rachmat, S. (2004). *Pengantar Logika Matematika*. Informatika Bandung.

Suraya. (2019). *Logika Informatika*.

Profil Penulis

Khairunnisa Fadhilla Ramdhania

Seorang dosen yang dikenal dengan panggilan Mrs. Nisa oleh para mahasiswa, dan menganggap dirinya muda, belia, dan ceria, padahal sudah berkepala 3. Penulis lahir di Jakarta, 28 Maret 1992. Sejak tahun 2007, penulis mulai tertarik pada bidang eksakta khususnya matematika. Kemudian di tahun 2010 penulis diterima sebagai mahasiwa Jurusan Matematika Universitas Padjadjaran dan menekuni bidang matematika analisis khususnya tentang pecahan atau fraksional. Penulis berhasil lulus pada tahun 2014, lalu mengajar beberapa anak sekolah secara berkelompok untuk belajar matematika. Dari sana penulis memiliki ketertarikan dalam pengajaran dan berkeinginan menjadi dosen sehingga memutuskan untuk melanjutkan studi S2 di Prodi Matematika Institut Teknologi Bandung dan menyelesaikannya dalam waktu 2 tahun. Pada tahun 2018 penulis resmi menjadi bagian dari Universitas Bhayangkara Jakarta Raya di Program Studi Informatika, yakni sebagai dosen pengampu bidang matematika yang menjadi ilmu dasar yang harus dikuasai oleh mahasiswa. Menjadi seorang penulis buku merupakan cita-cita yang sejak lama didambakan, dan ini adalah buku pertama penulis. Harapannya, penulis dapat konsisten berkontribusi menghasilkan buku-buku lain yang menarik dan mudah dipahami oleh pembaca.

10

LOGIKA KUANTOR BAB 10

Leny Hartati
Universitas Indraprasta PGRI

Definisi Kuantor

Istilah kuantor, sering digunakan dalam logika matematika. Kalimat terbuka dapat dijadikan kalimat deklaratif dengan mengganti variabelnya menjadi konstanta. Namun, kalimat terbuka juga dapat berubah menjadi kalimat deklaratif dengan menggunakan kuantor, yaitu ∀ yang dibaca untuk **setiap/semua** dan ∃ yang dibaca untuk **suatu/terdapat**. Dengan demikian, Kuantor didefinisikan sebagai suatu istilah yang menyatakan *"berapa banyak"* dari suatu obyek dalam suatu sistem. Kuantor juga merupakan kata-kata yang menunjukkan berapa banyak elemen yang dibutuhkan agar predikat menjadi benar.

Kalimat Kuantor

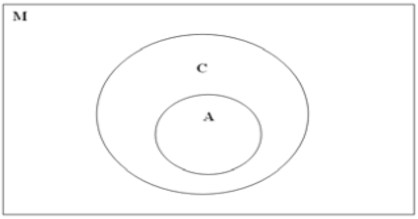
- $(\forall\ bilangan\ real\ x)\ x^2 \geq 0$ dapat dibaca sebagai:
  - Kuadrat dari sembarang bilangan real tidaklah negatif
  - Semua bilangan real mempunyai kuadrat tak negatif
  - Setiap bilangan real mempunyai kuadrat tak negatif
  - Sembarang bilangan real mempunyai kuadrat tak negatif
  - x mempunyai kuadrat tak negatif untuk setiap bilangan real x
- $(\exists\ bilangan\ bulat\ m)\ m^2 = m$ dapat dibaca sebagai:
  - Terdapatlah bilangan bulat yang kuadratnya sama dengan bilangan itu sendiri
  - Ada bilangan bulat yang kuadratnya sama dengan bilangan itu sendiri

- Kita dapat menemukan paling sedikit satu bilangan bulat yang sama dengan kuadratnya sendiri
- $m^2 = m$ untuk suatu bilangan bulat m
- Beberapa bilangan bulat sama dengan kuadratnya sendiri

Untuk menerjemahkan suatu kalimat menggunakan kuantor, terlebih dahulu kita buat variabel yang sesuai.

- Untuk menerjemahkan kalimat "Beberapa orang rajin berolahraga", kita definisikan $P(x)$: "x rajin berolahraga". Kalimat yang dimaksud dapat dinyatakan dengan kalimat berkuantor sebagai $(\exists x)\ P(x)$.
- Untuk menerjemahkan kalimat "Semua bayi memiliki wajah yang berbeda", kita definisikan $q(y)$: "bayi memiliki wajah yang berbeda". Kalimat yang dimaksud dapat dinyatakan dengan kalimat berkuantor sebagai $(\forall y)\ q(y)$.

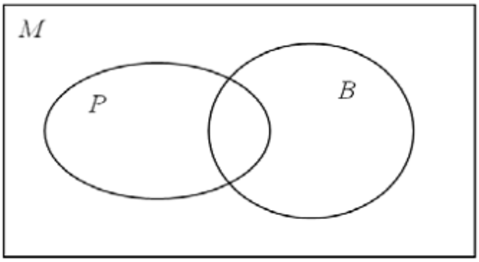
Pernyataan berkuantor dapat ditunjukkan dengan diagram Venn yang ditemukan oleh *John Venn*, seorang matematikawan Inggris yang menerbitkan buku tentang logika simbolik pada tahun 1881. Misal pernyataan berkuantor "Semua artis adalah cantik" di mana pernyataan tersebut bernilai benar. Pernyataan tersebut menjelaskan bahwa ada himpunan artis dan himpunan manusia cantik. Himpunan artis harus termuat dalam himpunan manusia cantik. Jika *A* himpunan artis dan *C* himpunan manusia cantik maka pernyataan "semua artis adalah cantik" dapat dinyatakan sebagai $C \subset A$ dan himpunan semestanya adalah *M* himpunan semua manusia sehingga diagram Venn yang diperoleh adalah



Gambar 10.1
Diagram Venn untuk Menunjukkan Pernyataan Kantor Universal
Sumber: Wahyudi, Budiono, & Inawati. (2012)

Berdasarkan diagram Venn, contoh kalimat “Semua artis adalah cantik” ekuivalen dengan implikasi “Jika x adalah artis maka x cantik”.

Pernyataan “Ada pria yang baik” menunjukkan bahwa ada himpunan pria dan himpunan manusia yang baik. Jika pernyataan tersebut bernilai benar maka dapat ditarik kesimpulan bahwa ada manusia yang merupakan anggota himpunan pria dan juga anggota himpunan manusia baik. Jadi kedua himpunan tersebut tidak saling asing. Misalkan Himpunan semestanya adalah himpunan manusia yang dilambangkan dengan M, P himpunan pria, dan B himpunan manusia baik maka diperoleh diagram Venn sebagai berikut.



Gambar 10.2
Diagram Venn yang Menunjukkan Pernyataan Kuantor Eksistensial
Sumber: Wahyudi, Budiono, & Inawati. (2012)

Diagram di atas menunjukkan bahwa $P \cap B \neq \emptyset$ maka pernyataan “Ada pria yang baik” dapat diubah menjadi pernyataan konjungsi yaitu pernyataan “Ada x sedemikian sehingga x adalah pria dan x baik”.

Kuantor Universal

Dalam ilmu logika, kalimat-kalimat yang memerlukan subyek di sebut predikat. Misalkan P adalah predikat: “terbang ke bulan”. Untuk menyatakan perlunya substitusi subyek (yang tidak diketahui), maka dituliskan $P(x)$, yang dibaca: “x terbang ke bulan”. $P(x)$ belum memiliki nilai nilai kebenaran karena benar/salah $P(x)$ tergantung dari x. Dalam pernyataan matematika, terdapat kata “untuk semua / untuk setiap x” yang dinotasikan $\forall x$ disebut kuantor universal (*universal quantifier*) dinotasikan $\forall$. $\forall(x)P(x)$ maka dibaca untuk setiap x berlaku x mempunyai sifat P, atau semua x mempunyai sifat P.

Kalimat dengan bentuk $\forall(x)P(x)$ merupakan kalimat deklaratif karena dapat ditentukan kebenarannya. Misalkan semesta pembicaran himpunan bilangan asli, dan P menyatakan sifat bilangan prima.

"$\forall(x)P(x)$" menyatakan bahwa untuk setiap bilangan asli x merupakan bilangan prima. Pernyataan ini bernilai salah. Variabel x diikat oleh kuantor yang bersangkutan, atau x berada dalam pengaruh kuantor yang bersangkutan. Kalimat yang variabelnya terikat oleh suatu kuantor dikatakan kalimat tertutup, lebih lanjut kalimat tersebut merupakan kalimat deklaratif. Suatu kuantor mengikat lebih kuat daripada kata hubung kalimat yang lain, misalkan

$\forall(x)P(x) \wedge (C \Rightarrow D)$ sama artinya dengan menulis $((\forall x)P(x)) \wedge (C \Rightarrow D)$

Dalam penulisan matematika, terkadang kuantor yang berada di depan kalimat tidak dituliskan. Misalkan $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$, yang dimaksudkan adalah $(\forall x)(\forall y)x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$ atau disingkat $(\forall x, y)$. Pernyataan ini dibaca untuk setiap x dan untuk setiap y berlaku $(\forall x)(\forall y)x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$.

Contoh:

Misalkan semesta pembicaraannya adalah himpunan bilangan bulat

a. $\forall(x)\ x^2 - 2 \geq 0$

   Jika x = 1 maka $x^2 - 2 = 1^2 - 2 = -1 < 0$. Jadi tidak semua x memenuhi $x^2 - 2 \geq 0$ sehingga (a) bernilai salah

b. $\forall(x)\ x^2 - 10x + 21 = 0$

   Meskipun ada x yang memenuhi $x^2 - 10x + 21 = 0$ (yaitu 3 atau 7 seperti pada soal (b), tetapi tidak sama semua x bersifat demikian. Jika $x = 1$, maka $x^2 - 10x + 21 = 1^2 - 10(1) + 21 = 12 \neq 0$. Maka kalimat (b) salah.

Kuantor Eksistensial

Kuantor eksistensial (*Existential Quantifier*) menunjukkan bahwa diantara obyek-obyek dalam semestanya, **paling sedikit ada satu obyek** (atau lebih) yang memenuhi sifat kalimat yang menyatakannya. Beberapa kata yang digunakan untuk menyebut kuantor eksistensial adalah: "Terdapat ...", "Berapa x bersifat ...", "Ada ...", "Paling sedikit ada satu x ...".

$(\exists x \in D)\ q(x)$ (kadang-kadang disingkat $(\exists x)\ q(x)$ bernilai benar jika dan hanya jika **paling sedikit ada satu x** dalam D yang menyebabkan $q(x)$ benar, dan bernilai salah jika untuk **semua** $x \in D$, $q(x)$ bernilai salah.

Contoh:

Misalkan semesta pembicaraannya adalah himpunan bilangan bulat

a. $(\exists x)\ x^2 - 10x + 21 = 0$

   Persamaan $x^2 - 10x + 21 = (x - 3)(x - 7) = 0$ akan dipenuhi untuk $x_1 = 3$ dan $x_2 = 7$. Jadi memang benar ada x yang memenuhi relasi $x^2 - 10x + 21 = 0$ (yaitu 3 atau 7) sehingga kalimat (a) bernilai benar.

b. $(\exists x)\ x^2 - 3 = 0$

   Persamaan $x^2 - 3 = 0$ dipenuhi oleh $x_1 = -\sqrt{3}$ dan $x_2 = \sqrt{3}$. Tapi nilai $x_1$dan x_2 tersebut bukanlah anggota semesta pembicaraan. Jadi tidak ada x yang memenuhi $x^2 - 3 = 0$, sehingga kalimat (b) bernilai salah.

Kuantor Gabungan

Misalkan diambil semesta pembicaraan himpunan bilangan real.

1. $(\forall x)(\exists y) y > x$

   Penjelasan: untuk setiap bilangan real x dapat ditemukan y sedemikian sehingga $y > x$. Maknanya adalah untuk setiap bilangan real dapat ditemukan suatu bilangan real yang lebih besar darinya.

2. $(\forall x)(\forall y) x = y \Leftrightarrow y = x$

   Penjelasan: untuk setiap pasangan bilangan real x, y berlaku $x = y$ jika dan hanya jika $y = x$.

3. $(\exists y)(\exists x) y > x$

   Penjelasan: ada bilangan lebih besar untuk setiap bilangan-bilangan real.

4. $(\forall x)(\forall y)(x \neq y) \Rightarrow (\exists z)((x < z) \wedge (z < y)) \vee ((y < z) \wedge (z < x))$

   Penjelasan: untuk setiap pasangan bilangan real yang berlainan, selalu ada bilangan real diantaranya.

Pernyataan dalam kehidupan sehari-hari dapat dituliskan dalam simbolisme. Sebagai contoh ”Semua manusia membutuhkan oksigen untuk bernafas”. Pernyataan ini sama maknanya dengan menyatakan “jika x merupakan manusia maka x membutuhkan oksigen untuk bernafas". Dalam simbolisme, dapat dinyatakan misalnya $T(x)$ = manusia x dan $A(x) = x$ membutuhkan oksigen untuk bernafas, sehingga $(\forall x)T(x) \Rightarrow A(x)$.

Contoh yang lain misalkan pernyataan "Ada binatang yang tidak mempunyai kaki", sama maknanya dengan mengatakan "Terdapat x adalah binatang dan x tidak mempunyai kaki". Secara simbolisme dapat dilambangkan $(\exists x)x$ binatang dan x tidak mempunyai kaki. Misalkan $B(x) = x$ binantang dan $K(x) = x$ mempunyai kaki, maka simbolismenya $\big(\exists(x)\big)B(x) \wedge \big(\sim K(x)\big)$.

Jika kalimat memuat 2 variabel (x dan y), ada 8 cara berbeda dalam menggunakan 2 kuantor $\forall$ dan $\exists$, masing-masing adalah $(\forall x)(\forall y), (\forall y)(\forall x), (\exists x)(\exists y), (\exists y)(\exists x),$
$(\forall x)(\exists y), (\exists y)(\forall x), (\forall y)(\exists x)$ dan $(\exists x)(\forall y)$. Jika semua kuantornya sama maka urutan penulisan kuantor-kuantor itu bisa dibalik, jadi $(\forall x)(\forall y)P(x,y) = (\forall y)(\forall x)P(x,y)$ dan $(\exists x)(\exists y)P(x,y) = (\exists y)(\exists x)P(x,y)$.

Akan tetapi jika kuantornya berbeda, urutan penulisannya tidak selalu dapat dibalik. Secara umum, $(\forall x)(\exists y)P(x,y) \neq (\exists x)(\forall y)P(x,y)$.

Pada kuantor $(\forall x)(\exists y)P(x,y)$, keberadaan y tidaklah tunggal. Untuk x_1 ada y_2 yang menyebabkan $P(x,y)$ benar. Untuk x_2 ada y_1 (yang tidak harus sama dengan y_2), dan seterusnya. Sebaliknya pada kuantor $(\exists x)(\forall y)$, keberadaan x adalah tunggal. Ada sebuah x yang menyebabkan $P(x,y)$ benar untuk semua y.

Untuk membuktikan bahwa pernyataan dengan kuantor $(\exists x)(\exists y)P(x,y)$ (atau $(\exists y)(\exists x)P(x,y)$) **benar**, kita cukup mengambil sebuah x dan sebuah y yang memenuhi $P(x,y)$.

Untuk membuktikan bahwa pernyataan dengan kuantor $(\forall x)(\forall y)P(x,y)$ (atau $(\forall y)(\forall x)P(x,y)$) salah, kita cukup mengambil sebuah x dan sebuah y yang tidak memenuhi $P(x,y)$. x dan y yang memenuhi sifat tersebut disebut contoh penyangkal.

Diperhatikan $(\forall x)(\exists y)R(x,y)$. Misalkan semestanya himpunan bilangan real dan $R(x,y)$ diartikan $y > x$. Kalimat tersebut bermakna tidak ada bilangan real terbesar. Selanjutnya, $(\exists y)(\forall x)R(x,y)$. Kalimat ini berarti ada bilangan real terbesar. Pernyataan yang pertama benar sedangkan pernyataan yang kedua salah, maka kedua kalimat tersebut tidak ekuipolen (kalimat yang mempunya nilai logika tidak sama). Kuantor universal pada kalimat pertama digunakan secara distributive, yaitu setiap x dapat ditemukan suatu y. Sedangkan dalam kalimat kedua, penggunaannya secara kolektif, yaitu ada suatu y sedemikian untuk setiap x berlaku.

Misalkan diubah semesta pembicaraannya menjadi himpunan bilangan asli dari 1 sampai 10 sedangkan R adalah relasi $\geq$. Pernyataan $(\exists y)(\forall x)R(x,y)$ menyatakan bahwa ada bilangan asli terbesar sehingga bernilai benar. Lebih lanjut, kalimat $(\forall x)(\exists y)R(x,y)$ menyatakan bahwa untuk setiap anggota dapat ditemukan anggota lain yang lebih besar atau sama dengannya, maka kalimat ini bernilai benar.

Secara umum, hubungan antara penempatan kuantor ganda adalah sebagai berikut:

$(\forall x)(\forall y)P(x,y) \quad \Leftrightarrow \quad (\forall y)(\forall x)P(x,y)$

$(\exists x)(\exists y)P(x,y) \quad \Leftrightarrow \quad (\exists y)(\exists x)P(x,y)$

$(\exists x)(\forall y)P(x,y) \quad \Leftrightarrow \quad (\forall y)(\exists x)P(x,y)$

$(\exists y)(\forall x)g(x,y) \quad \Rightarrow \quad (\forall x)(\exists y)g(x,y)$

Lebih lengkapnya tersaji pada tabel berikut.

Tabel 10.1

Ekuivalensi formula pada logika first-order

1. a. $\neg \forall x\, p(x) \Leftrightarrow \exists x\, [\neg p(x)]$

   b. $\neg \exists x\, p(x) \Leftrightarrow \forall x\, [\neg p(x)]$

   c. $\forall x\, p(x) \Leftrightarrow \neg \exists x\, [\neg p(x)]$

   d. $\exists x\, p(x) \Leftrightarrow \neg \forall x\, [\neg p(x)]$

2. a. $(\forall x)\, p(x) \vee q \Leftrightarrow (\forall x)\, (p(x) \vee q)$

   b. $(\exists x)\, p(x) \vee q \Leftrightarrow (\exists x)\, (p(x) \vee q)$

3. a. $(\forall x)\ p(x) \wedge q \Leftrightarrow (\forall x)\ (p(x) \wedge q)$

   b. $(\exists x)\ p(x) \wedge q \Leftrightarrow (\exists x)\ (p(x) \wedge q)$

4. a. $(\forall x)\ p(x) \vee (\forall x)\ q(x) \Leftrightarrow (\forall x)(\forall z)\ (p(x) \vee q(z))$

   b. $(\forall x)\ p(x) \vee (\exists x)\ q(x) \Leftrightarrow (\forall x)(\exists z)\ (p(x) \vee q(z))$

   c. $(\exists x)\ p(x) \vee (\forall x)\ q(x) \Leftrightarrow (\exists x)\ (\forall z)\ (p(x) \vee q(z))$

   d. $(\exists x)\ p(x) \vee (\exists x)\ q(x) \Leftrightarrow (\exists x)\ (\exists z)\ (p(x) \vee q(z))$

5. a. $(\forall x)\ p(x) \wedge (\forall x)\ q(x) \Leftrightarrow (\forall x)(\forall z)\ (p(x) \wedge q(z))$

   b. $(\forall x)\ p(x) \wedge (\exists x)\ q(x) \Leftrightarrow (\forall x)(\exists z)\ (p(x) \wedge q(z))$

   c. $(\exists x)\ p(x) \wedge (\forall x)\ q(x) \Leftrightarrow (\exists x)\ (\forall z)\ (p(x) \wedge q(z))$

   d. $(\exists x)\ p(x) \wedge (\exists x)\ q(x) \Leftrightarrow (\exists x)\ (\exists z)\ (p(x) \wedge q(z))$

Contoh:

Misalkan $P(x, y)$: “y adalah ayah dari x” dan semesta adalah himpunan semesta semua manusia di bumi.

a. $(\forall x)(\exists y)P(x, y)$ berarti:

   Untuk setiap orang x terdapatlah seorang y sedemikian hingga y adalah ayah dari x. Dengan kata lain: setiap orang mempunyai ayah. Misalkan ayah dari x_1 adalah y_2. Ayah dari x_2 adalah y_1 (yang bisa sama ataupun berbeda dengan y_2), dan seterusnya.

b. $(\exists y)(\forall x)P(x, y)$ berarti

   Terdapatlah seorang y sehingga untuk semua orang x, y adalah ayah dari x. Dengan kata lain: ada seorang ayah yang merupakan ayah dari semua orang di dunia ini.

   Jelas bahwa kedua pernyataan tersebut mempunyai arti yang berbeda. Nilai kebenaran (a) adalah benar, sedangkan (b) salah.

Negasi Pernyataan Berkuantor

Ingkaran kalimat: "Semua x bersifat $P(x,y)$" adalah "Ada x yang tidak bersifat $P(x,y)$", dan ingkaran kalimat "Ada x yang bersifat q(x)" adalah "Semua x tidak bersifat q(x)". Secara formal, ingkaran berkuantor adalah sebagai berikut:

$$\neg\,((\forall x \in D)\, p(x)) \equiv (\exists x \in D) \neg\, p(x)$$

$$\neg\,((\exists x \in D)\, q(x)) \equiv (\forall x \in D) \neg\, q(x)$$

Untuk mencari ingkaran suatu kalimat, kalimat lebih dulu ditulis ulang menggunakan kuantor, kemudian barulah dituliskan ingkarannya, seperti contoh berikut:

a. Terdapatlah bilangan x sedemikian hingga $x^2 = 16$.

   Kalimat mula-mula : $(\exists x \in bulat)x^2 = 16$

   Ingkaran : $(\forall x \in bulat)x^2 \neq 16$

   Dalam kalimat verbal: "kuadrat semua bilangan bulat tidak sama dengan 16".

b. Semua hewan purba telah punah

   Kalimat mula-mula :$(\forall x \in hewan\ purba)\ (x\ telah\ punah)$

   Ingkaran :$(\exists x \in hewan\ purba)\ (x\ belum\ punah)$

   Dalam kalimat verbal: "Ada hewan purba yang belum punah".

c. Tidak ada ahli kimia yang malas

   Kalimat mula-mula : semua ahli kimia tidak malas $atau$ $(\forall x \in ahli\ kimia)\ (x\ tidak\ malas)$

   Ingkaran : $(\exists x \in ahli\ kimia)\ (x\ malas)$

   Dalam kalimat verbal: "Ada ahli kimia yang malas".

d. Semua bilangan bulat adalah bilangan genap

   Bilangan n disebut bilangan genap apabila terdapat bilangan bulat k dengan sifat n = $2k$, sehingga kalimat mula-mula dapat ditulis $(\forall\ bilangan\ bulat\ n)\ (\exists\ bilangan\ bulat\ k)\ n = 2k$

   Ingkaran: $(\exists\ bilangan\ bulat\ n)\ (\forall\ bilangan\ bulat\ k)\ n \neq 2k$

   Dalam kalimat verbal: "Ada bilangan bulat yang tidak sama dengan 2 kali bilangan bulat lain", atau "ada bilangan bulat yang tidak genap".

Misalkan semesta pembicaraan himpunan bilangan asli sedangkan $G\ (x, y, z)$ menyatakan z terletak di antara $x\ dan\ y$. Ingkaran dari pernyataan $(\forall x)(\forall y)(x \neq y) \Rightarrow (\exists z)G(x, y, z)$ yaitu

$\overline{(\forall x)(\forall y)(x \neq y) \Rightarrow (\exists z)G(x, y, z)}$

$(\exists x)(\exists y)\ \overline{(x \neq y) \Rightarrow (\exists z)G(x, y, z)}$

$(\exists x)(\exists y)(x \neq y) \wedge\ \overline{(\exists z)G(x, y, z)}$

$(\exists x)(\exists y)(x \neq y) \wedge \forall z\ \overline{G(x, y, z)}$

Kuantor Lain

Didalam logika matematika masih digunakan kuantor-kuantor yang lain. Susunan kata dibawah ini merupakan pengecualian. Misalkan pernyataan berikut:

Ada satu dan tidak lebih dari satu x yang mempunyai sifat P. Dinyatakan dalam bentuk kuantor maka $(\exists x)(P(x)\ \wedge\ (\forall y)P(y) \Rightarrow x = y)$

Hal ini berarti ada suatu x sedemikian sehingga x mempunyai sifat P dan untuk setiap y dari semestanya, apabila y mempunyai sifat P maka $y = x$. Susunan kata tersebut banyak digunakan dalam logika matematika. Untuk menyatakan hal tersebut disimbolkan dengan $(\exists!\, x)P(x)$ diucapkan terdapat secara tunggal x mempunyai sifat P.

Misalkan semesta pembicaraan himpunan bilangan real. Pernyataan "Ada suatu x yang positif dengan sifat P. Makna kalimat ini menyatakan ada suatu x yang sekaligus positif memiliki sifat P sehingga kuantornya $(\exists x)(x > 0) \wedge P(x)$ atau $(\exists x > 0)P(x)$. Selanjutnya, misalkan pernyataan "semua x yang positif mempunyai sifat P". Perhatikan simbolisme berikut: $(\forall x)(x > 0) \wedge P(x)$…….. (persaman 1)

Pada simbolisme kuantor persamaan 1, jika dibaca semua bilangan real adalah positif dan mempunyai sifat P. Pernyataan ini bernilai salah . Ketika menyatakan pernyataan "semua x yang positif mempunyai sifat P" sama dengan menyatakan bahwa untuk setiap x berlakulah, jika x positif maka x mempunyai sifat P. Sehingga simbolismenya $(\forall x)(x > 0) \Rightarrow P(x)$ atau $(\forall x > 0)P(x)$.

Latihan Soal

1. Tuliskan dengan simbolisme logika kalimat-kalimat berikut! (Tentukan semesta pembicaraannya terlebih dahulu!)
   a. Sekurang-kurangnya ada satu x yang mempunyai sifat P
   b. Untuk setiap bilangan positif ε terdapat bilangan positif δ yang bersifat $|\delta| < \varepsilon$
   c. Ada wanita yang menyukai sepak bola
   d. Tidak satupun siswa yang memakai batik
   e. Ada bilangan L yang memenuhi untuk setiap bilangan positif ε, terdapat bilangan positif δ sedemikian sehingga untuk setiap x anggota D_f yang memenuhi $0 < |x - a| < \delta$ berlaku $|f(x) - L < \varepsilon$
2. Semesta pembicaraan adalah himpunan bilangan 0, 1, 2, 3, 4. Tentukan nilai logika dari kalimat berikut ini:
   a. $(\forall x)x \geq -1$
   b. $(\exists x)x^2 - x > x - 1$
   c. $(\forall x)x^2 \leq 16$
   d. $(\exists x)\sqrt{x^2} = -x$
3. Diberikan semesta pembicaraan himpunan semua bilangan rasional. Bacalah kalimat-kalimat di bawah ini, kemudian tuliskan maknanya. Tentukan nilai kebenarannya.
   a. $(\exists x)(x^2 - 1 = 0)$
   b. $(\forall y)(\exists x)(x \leq y)$
   c. $(\exists y)(\forall x)(y^x = x^0 = 1)$
   d. $(\forall x)(\forall y)(x \neq y \Rightarrow (x < y \vee x > y))$
   e. $(\forall x)(\exists y)(xy = x)$

Daftar Pustaka

Rahmat, S. (2004). Pengantar Logika Matematika. Bandung: Informatika

Siang, J. J. (2014). Logika Matematika. Yogyakarta: Andi

Susilowati, E. (2016). Logika Matematika dan Himpunan. Yogyakarta: Graha Ilmu

Wahyudi, Budiono, & Inawati. (2012). Pemecahan masalah. Salatiga: Widyasari Press https://repository.uksw.edu/bitstream/123456789/2476/17/BOOK_WahyudiInawati%20B_Pemecahan%20masalah%20matematika_Unit%205.pdf

Profil Penulis

Leny Hartati

Ketertarikan penulis terhadap science dimulai pada tahun 2001 silam. Hal tersebut membuat penulis memilih untuk masuk ke Sekolah Menengah Atas di Madrasah Aliyah Negeri 7 Jakarta dengan memilih Jurusan IPA dan berhasil lulus pada tahun 2004 dengan predikat juara umumdi jurusan tersebut. Penulis kemudian melanjutkan pendidikan ke Perguruan Tinggi dan berhasil menyelesaikan studi S1 di prodi Pendidikan Matematika Unindra pada tahun 2008. Dua tahun kemudian, penulis menyelesaikan studi S2 di prodi Pendidikan MIPA di kampus yang sama.

Penulis memiliki kepakaran dibidang pendidikan matematika. Dan untuk mewujudkan karir sebagai dosen profesional, penulis pun aktif sebagai peneliti dibidang kepakarannya tersebut. Beberapa penelitian yang telah dilakukan didanai oleh internal perguruan tinggi. Selain sebagai peneliti dan pengajar anak-anak, penulis juga aktif di kegiatan sosial dan masyarakat yaitu dibidang kesehatan dengan harapan dapat memberikan kontribusi positif bagi pendidikan dan masyarakat luas.

Email Penulis: leny.hartati2@gmail.com

11

KALIMAT BERKUANTOR

Inelsi Palengka
Universitas Kristen Indonesia Toraja

Pengertian Kalimat Berkuantor

Quantifier atau kuantor adalah kata yang mendahului kata benda sebagai fungsi untuk menunjukkan jumlah dari benda tersebut. Kalimat berkuantor adalah kalimat yang memiliki suatu istilah yakni untuk menjelaskan "berapa banyak anggota" yang ada dalam suatu kalimat (Rusli, n.d). Sehingga kita akan lebih relate dengan Kalimat dengan kata "semua" maupun "ada sebagian / beberapa" ini menjelaskan mengenai kalimat kuantor ini.

Fungsi Kalimat Kuantor

Kalimat kuantor sebenarnya menjelaskan secara sederhana membuat kalimat terbuka memiliki suatu nilai kebenaran tersendiri. Sehingga kalimat terbuka ini menjadi kalimat berkuantor dengan nilai kebenarannya seperti kalimat tertutup.

Contoh:
i) $x + 10 = 15$, dalam hal ini HP $=\{5\}$

ii) $x^2-7x-18 = 0$, dalam hal ini HP $= \{-2, 8\}$

Kalimat diatas adalah kalimat terbuka, namun belum memiliki suatu konstanta tersendiri sehingga perlu proses pengubahan. Sedangkan jika kita ambil dalam konteks kuantor salah satu soal nomor i akan berbeda hasilnya. Mari kita coba untuk memberikan suatu jumlah pada kalimat terbuka diatas dengan memberikan kata "ada" maupun "semua" dalam kalimat diatas.

1. Ada beberapa nilai x yang memenuhi suatu Kalimat x +10 = 15 (Benar)
2. Untuk Semua nilai x, berlaku pada Kalimat x + 10 = 15 (Salah).

Dalam Kalimat diatas disebut dengan proses kuantifikasi. Kuantifikasi adalah suatu proses dimana memberikan kuantor atau "banyaknya anggota" di dalam suatu kalimat terbuka (Sismoro, n.d). Sehingga dalam hal ini dapat dikatakan kalimat terbuka memiliki nilai kebenaran tersendiri karena telah menjadi kalimat berkuantor.

Jenis-Jenis Kalimat Kuantor

Dalam suatu kalimat kuantor dikenal ada dua unsur yaitu *semua* dan *ada beberapa*. Dalam bahasan logika matematika, kalimat berkuantor terdiri dari dua macam yaitu ***kuantor universal*** (kuantor umum) dan ***kuantor eksistensial*** (kuantor khusus) (Susanti,2020). Antara dua macam berkuantor tersebut saling berkebalikan atau berlawanan. Kuantor universal menjadi negasi/ingkaran untuk kuantor eksistensial, begitu juga dengan kondisi sebaliknya. Ada dua jenis kalimat berkuantor, yakni kalimat kuantor universal/semesta/umum dengan kuantor eksistensial / khusus.

1. Kuantor Semesta / Universal

Kuantor universal menunjukkan bahwa setiap objek dalam semestanya mempunyai sifat kalimat yang menyatakannya. Kita dapat meletakkan kata-kata “Untuk semua/setiap x” di depan kalimat terbuka yang mengandung variabel x untuk menghasilkan kalimat yang mempunyai suatu nilai kebenaran. Nilai x ditentukan berdasarkan semesta pembicaraannya. Kuantor universal disimbolkan dengan “$\forall$”. Kuantor universal mengindikasikan bahwa sesuatu bernilai benar untuk semua individual-individualnya. Perhatikan kalimat berikut ini:

“Semua gajah mempunyai belalai”

Maka jika predikat “mempunyai belalai” diganti dengan simbol B maka dapat ditulis:

$G(x) \Rightarrow B(x)$, dapat dibaca “Jika x adalah gajah, maka x mempunyai belalai”. Tetapi kalimat di atas belum berupa kalimat berkuantor karena kalimat diatas belum memuat kata “semua”. Untuk itu perlu ditambahkan simbul kuantor universal sehingga menjadi $(\forall x)\ (G(x) \Rightarrow B(x))$, jadi sekarang dapat dibaca" Untuk semua x, jika x adalah gajah, maka x mempunyai belalai".

Contoh Kalimat-Kalimat dengan kuantor universal:

- **Semua** siswa memakai seragam dengan rapi.
- **Setiap** benda langit yang bercahaya disebut bintang.
- **Tiap – tiap** anak memiliki seorang ibu kandung.

Kuantor semesta sering menggunakan lambang / simbol matematika " ∀ " atau bisa disebut A terbalik atau disebut FOR ALL (Aliya,2020). Simbol ini sendiri dibaca "Setiap", "sembarang", dan "Semua". Dalam bahasa inggris, misalnya untuk orang ada kata "every people" , "all people", "anybody", "each people", dan lain-lainnya.

Pembuktian dari Kuantor Semesta :

- Kuantor Semesta bernilai benar jika seluruh anggota dari suatu himpunan penyelesaian dalam premis tersebut benar. Jika $\{x|x \in A, p(x)\} = A$, maka $\forall x$ A, p(x) adalah benar
- Kuantor Semesta bernilai salah jika salah satu anggota atau seluruh anggota dalam suatu himpunan penyelesaian dalam premis tersebut salah. Jika $\{x|x \in A, p(x)\} \neq A$, maka $\forall x$ A, p(x) adalah salah

Contoh:

i. $P = \{x|x \in$ Bilangan Positif, maka $x > 0\}$ adalah **benar** dikarenakan P = {1, 2, 3, 4, 5 ...} karena 1 > 0 dan seterusnya adalah benar.

ii. A = {1, 2, 3, 4} dan $\{x \mid x \in A\}$ maka $\{x^2 > 0\}$ adalah **benar** dikarenakan setiap anggota memenuhi persamaan $\{x^2 > 0\}$

iii. Untuk semua (∀) unsur x adalah bilangan real, maka $x^2 = x$ adalah **salah** dikarenakan ada beberapa (lebih dari satu) anggota bilangan real tidak memenuhi persamaan $x^2 = x$

iv. Untuk semua (∀) unsur x adalah bilangan negatif, maka $x - 10 > 0$ adalah **salah** dikarenakan seluruh (semua anggota) tidak memenuhi persamaan $x – 10 > 0$.

2. Kuantor Eksistensial

Kuantor eksistensial menunjukkan bahwa diantara objek-objek dalam semestanya, paling sedikit ada satu objek yang memenuhi sifat kalimat yang menyatakannya. Kita dapat meletakkan kata-kata: “Terdapat”, “Beberapa x bersifat”, “Ada ”, “Paling sedikit ada satu x” di depan kalimat terbuka yang mengandung variabel x. Kuantor eksistensial disimbolkan dengan ”∃”. Kuantor eksistensial mengindikasikan bahwa sesuatu kadang-kadang bernilai benar untuk individu-individualnya. Dalam bahasa inggris, penggunaan kuantor eksistensial dapat ditunjukkan dengan penggunaan kata kata: ”some”, ” there is”, ”at least one”, dan kata-kat a lain yang sama artinya.

Perhatikan kalimat berikut ini:

” Ada pelajar yang memperoleh beasiswa berprestasi”

Untuk melakukan pengkuantoran eksistensial pada pernyataan tersebut, dilakukan langkah-langkah sebagai berikut:

Carilah scope dari kuantor-kuantor eksistensialnya, yaitu:

“Ada x yang adalah pelajar, dan x memperoleh beasiswa berprestasi “.

Selanjutnya akan ditulis:

Pelajar(x) ∧ memperoleh beasiswa berprestasi (x)

Berilah kuantor eksisitensial di depannya.

(∃x) (Pelajar (x)∧ memperoleh beasiswa berprestasi(x))

Ubahlah menjadi suatu fungsi.

$(\exists x)\ (P(x) \wedge B(x))$

Contoh:

- **Ada** bunga mawar yang berwarna putih.
- **Beberapa** rumah memiliki banyak jendela.

- **Terdapat** bilangan asli x yang memenuhi pertidaksaam kuadrat $x^2 + 2x - 3 > 0$.

Kuantor Eksistensial dalam matematika disimbolkan dengan lambang "∃" simbol ini bermaksud There Exits / Ada Beberapa

Pembuktian dari kuantor eksistensial :

- Suatu statemen ∃x P(x) bernilai benar jika salah satu anggota (paling sediki satu) x dalam D/Premis adalah benar.
- Suatu statemen ∃x P(x) bernilai salah jika seluruh anggota (semua anggota) x dalam D/Premis bernilai benar (Semua anggota benar bukan salah satu anggota).
- Suatu statemen ∃x P(x) bernilai salah jika seluruh anggota (semua anggota) x dalam D / Premis bernilai salah (semua anggota bernilai salah).

Contoh:

i. $(\exists\ x \in A)\ \ (x + 10 < 15)$, dengan A = merupakan suatu himpunan bilangan bulat positif adalah Kalimat benar. Karena x = {1,2,3,4} ≠ ∅ dan tidak semua himpunan bilangan bulat positif memenuhi {0, 1, 2, 3 ....}

ii. A = {1,2,3, …, 6}, yang membuat suatu kalimat kuantor $(\exists\ x \in A)$, $(x + 3 > 2)$, adalah salah dikarenakan x dalam himpunan A memuat seluruh anggota A, bukan beberapa anggota A.

iii. Kalimat berikut yang bernilai benar adalah ….

A. $(\forall x)\ \ (6x - 3 \geq 4)$

B. $(\exists x)\ \ (x \in R \rightarrow x^2 \geq 0)$

C. $(\forall x)\ \ (x \in R \rightarrow x^2 \geq 0)$

D. $(\forall x \in R)\ \ (x^2 + 3x - 4 > 0)$

E. $(\forall x \in R)\ \ (x^2 + 4x - 12 \leq 0)$

Pembahasan:
Kalimat pilihan A salah karena tidak semua nilai x akan berlaku untuk pertidaksamaan $6x - 3 \geq 4$, misalnya untuk nilai x = 1, pertidaksamaan menjadi seperti berikut.

$6x - 3 \geq 4$

$6(1) - 3 \geq 4$

$3 \geq 4 \rightarrow$ Kalimat yang bernilai salah

Pilihan B salah karena semua $(\forall x)$ hasil kuadrat bilangan real akan menghasilkan nilai positif ($x^2 \geq 0$), *bukan* ada $(\exists x)$.

Kalimat pada pilihan D salah karena *ada* nilai x yang tidak memenuhi alimat, misalnya x = 0.

$x^2 + 3x - 4 > 0$

$0^2 + 3(0) - 4 > 0$

$-4 > 0 \rightarrow$ Kalimat yang bernilai salah

Kalimat pada pilihan E salah karena *ada* nilai x yang tidak memenuhi kalimat, misalnya x = 3.

$x^2 + 4x - 12 \leq 0$

$3^2 + 3(3) - 4 \leq 0$

$9 + 9 - 4 \leq 0$

$-14 \leq 0 \rightarrow$ Kalimat yang bernilai salah

Jadi, kalimat berikut yang bernilai benar adalah $(\forall x)$ $(x \in R \rightarrow x^2 \geq 0)$.

Domain atau semesta pembicaraan penafsiran kuantor sangat penting untuk menentukan jenis kuantor yang akan digunakan serta mempengaruhi penulisan simbolnya. Lihat contoh berikut:

"Setiap orang mencintai Jogjakarta"

Selanjutnya, dapat ditulis simbolnya dengan logika predikat $(\forall x)$ $C(x,j)$

Simbol tersebut dapat dibaca "Untuk semua y, y mencintai Jogjakarta". Persoalan yang terjadi adalah domain penafsiran seseorang untuk y bisa berbeda-beda. Ada orang yang menganggap y ádalah manusia, tetapi mungkin orang lain menganggap y bisa mahluk hidup apa saja, missal ayam, bebek, bahkan mungkin y bisa menjadi benda apa saja. Tentu saja domain penafsiran semacam ini kacau karena yang dimaksudkan pasti hanya orang atau manusia. Oleh karena itu, untuk memastikan bahwa domain penafsiran hanya orang, penulisan simbol harus diperbaiki seperti berikut:

$(\forall y)\ (O(y) \Rightarrow C(y,j))$

Sekarang simbol tersebut dapat dibaca"Untuk semua y jika y adalah orang, maka y mencintai Jogjakarta".

Untuk menulis simbol yang tepat, memang harus menempatkan terlebih dahulu domain penafsiran karena domain penafsiran sangat mempengaruhi penulisan dan sekaligus menghindari terjadinya ambiguitas. Contoh domain penafsiran yang bersifat umum antara lain manusia, binatang, tumbuh-tumbuhan, bilangan prima, bilangan asli, dan sebagainya, yang nantinya akan menggunakan kuantor universal. Akan tetapi jika tertentu saja atau tidak semuanya, misalnya beberapa manusia, atau satu manusia saja, akan memakai kuantor yang berbeda yaitu kuantor eksisitensial.

Persoalan selanjutnya adalah bagaimana jika memakai dua kuantor yang berbeda pada satu penulisan simbol yang berasal dari satu pernyataan. Apakah domain penafsiran juga akan berbeda atau sama? Perhatikan contoh berikut:

"Setiap orang dicintai oleh seseorang"

Dengan notasi simbol logika predikat, akan ditullis seperti berikut

$(\forall x)\ (\exists y)\ C\ (y,x)$

Yang dapat dibaca "Untuk semua x, terdapat y dimana y mencintai x"

X dan Y sebenarnya menunjuk domain penafsiran yang sama yaitu orang, dan pada simbol tersebut ternyata dibedakan. Penulisan tersebut lebih baik lagi jika bisa memakai variable yang sama. Maka pernyataan diatas secara lengka p dapat ditulis:

$(\forall x)\ (O(x) \Rightarrow (\exists x)\ (O(y) \land C(y,x))$

Ingkaran Kalimat Berkuantor

Kuantor universal dan eksistensial memiliki hubungan saling berkebalikan. Bentuk ingkaran dari kuantor universal adalah kuantor eksistensial, begitu juga untuk ingkaran dari kuantor eksistensial adalah kuantor universal. Dalam kata lain dapat disimpulkan bahwa negasi atau ingkaran dari kata "semua" atau "setiap" adalah "ada" atau "beberapa" atau "terdapat". Kondisi sebaliknya juga berlaku, negasi/ingkaran dari "ada" atau "beberapa" atau "terdapat" adalah "semua" atau "setiap".

Secara umum, bentuk ingkaran dari semua p adalah terdapat ~p. Sementara bentuk ingkaran dari ***beberapa p*** adalah ***semua ~p***, dan bentuk ingkaran dari ***semua p*** adalah ***beberapa ~p***.

Ingkaran kuantor universal:

$$\sim(\forall x \ni p(x)) \equiv \exists x \ni (\sim p(x))$$

Ingkaran kuantor eksisensial:

$$\sim(\exists x \ni p(x)) \equiv \forall x \ni (\sim p(x))$$

Contoh ingkaran kalimat berkuantor universal:

- Kalimat berkuantor universal:

  Semua *kucing memiliki penglihatan yang baik di malam hari.*

  Ingkaran: ***Beberapa*** *kucing* ***tidak*** *memiliki penglihatan yang baik di malam hari.*

- Kalimat berkuantor: $\forall x \in \boldsymbol{R} \ni (2x \geq 2)$

  Ingkaran: $\sim (\forall x \in \boldsymbol{R} \ni (2x \geq 2)) \equiv \exists x \in \boldsymbol{R} \ni (2x < 2)$

Contoh ingkaran kalimat berkuantor eksistensial:

- Kalimat berkuantor eksistensial:

  Beberapa *siswa mendapat nilai matematika yang sempurna pada ujian akhir kali ini.*

  Ingkaran: ***Semua*** *siswa* ***tidak*** *mendapat nilai matematika yang sempurna pada ujian akhir kali ini.*

- Kalimat berkuantor eksistensial: $\exists x \in \boldsymbol{R} \ni (2x - 2 < 0)$

  Ingkaran: $\sim (\exists x \in \boldsymbol{R} \ni (2x - 2 < 0)) \equiv \forall x \in \boldsymbol{R} \ni (2x - 2 \geq 0)$

Contoh

Ingkaran dari alimat “Semua makhluk hidup perlu makan dan minum” adalah ….

A. semua makhluk hidup tidak perlu makan dan minum

B. ada makhluk hidup yang tidak perlu makan dan minum

C. ada makhluk hidup yang tidak perlu makan atau minum

D. semua makhluk hidup perlu makan dan hidup

E. semua makhluk hidup perlu makan tetapi tidak perlu minum

Pembahsan:
Kalimat pada soal memuat kata ***semua*** yang merujuk pada kalimat berkuantor universal. Bentuk ingkaran kalimat berkuantor universal: $\sim(\forall x \ni p(x)) \equiv \exists x \ni \sim p(x)$

- Ingkaran dari kata semua $\sim(\forall x)$ makhluk hidup adalah beberapa $(\exists x)$ makhluk hidup
- Ingkaran dari perlu makan dan minum adalah tidak perlu makan atau minum.

Jadi, ingkaran dari kalimat *Semua makhluk hidup perlu makan dan minum* adalah *ada makhluk hidup yang tidak perlu makan atau minum.*

Contoh

Ingkaran dari Kalimat *Jika semua orang gema r matematika maka IPTEK negara kita maju pesat* adalah ….

A. Jika semua orang tidak gemar matematika maka iptek negara kita mundur.

B. Jika semua orang tidak gemar matematika maka iptek negara kita tida k maju pesat.

C. Jika beberapa orang tidak gemar matematika maka iptek negara kita tidak maju pesat.

D. Beberapa orang gemar matematika dan iptek negara kita tidak maju pesat.

E. Semua orang gemar matematika tetapi iptek negara kita tidak maju pesat.

Pembahasan:
Kalimat menggunakan kata ***semua*** $(\forall x)$ → Kalimat berkuantor universal

Misalkan:

- p = gemar matematika
- q = IPTEK negara kita akan maju pesat
- Simbol unutk kalimat *Jika semua orang gemar matematika maka IPTEK negara kita akan maju pesat*: $p \rightarrow q$.

Bentuk ingkaran kalimat berkuantor universal: $\sim(\forall x \ni p(x)) \equiv \exists x \ni \sim p(x)$

- Ingkaran semua orang $\sim(\forall x)$: beberapa orang $(\exists x)$
- Negasi/ingkaran untuk sebuah implikasi $p \rightarrow q$ adalah $p \wedge \sim q$ (gemar matematika dan iptek negara kita tidak akan maju pesat)

Jadi, ingkaran dari kalimat *Jika semua orang gemar matematika maka IPTEK negara kita maju pesat* adalah *Beberapa orang gemar matematika dan iptek negara kita tidak maju pesat*.

Daftar Pustaka

Aliya, N., Hermanto, D., & Hasan, B. (2020). Profil Penalaran Siswa SMA dalam Menyelesaikan Masalah Logika Berdasarkan Perbedaan Gaya Kognitif. *JEMS: Jurnal Edukasi Matematika dan Sains*, *8*(2), 181. https://doi.org/10.25273/jems.v8i2.7620

Rusli, M., Suniantara, I. K., & Nugroho, A. (n.d.). *Logika Dan Matematika*. Penerbit Andi.

Sismoro, H., & Amikom, U. (n.d.). *Pengantar Logika Informatika. Algoritma Dan Pemrograman Komputer*. Penerbit Andi.

Susanti, R. D. (2020). *Dasar-dasar Logika dalam Matematika*. UMMPress.

Profil Penulis

Dr. Inelsi Palengka, M.Pd

Ketertarikan penulis terhadap Pendidikan matematika dimulai pada tahun 2008 silam. Hal tersebut membuat penulis memilih untuk masuk ke Universitas Kristen Indonesia Toraja dengan memilih Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA (2008), kemudian melanjutkan studi S2 pada program pascasarjana pada program studi Pendidikan Matematika di Universitas Negeri Makassar (2013), dan S3 Pendidikan Matematika di Universitas Negeri Surabaya (2017). Sejak tahun 2012 hingga sekarang tercatat sebagai dosen di program studi Pendidikan Matematika pada Universitas Kristen Indonesia Toraja.

Penulis memiliki kepakaran dibidang Pendidikan Matematika. Dan untuk mewujudkan karir sebagai dosen profesional, penulis pun aktif sebagai peneliti dibidang kepakarannya tersebut. Beberapa penelitian yang telah dilakukan dipublikasikan pada jurnal nasional dan internasional bereputasi.

Email Penulis: inelsipalengka@gmail.com

12

ATURAN PENARIKAN KESIMPULAN BAGIAN II

Beatric Videlia Remme
Universitas Kristen Indonesia Toraja

Menyederhanakan Kalimat Berkuantor

Telah dijelaskan pada bab sebelumnya bahwa pernyataan kuantor universal mempunyai nilai benar, jika pernyataan tersebut benar untuk semua semesta yang dibicarakan dan salah, jika terdapat sekurang-kurangnya ada satu anggota semesta yang menyebabkan pernyataan salah. Sedangkan untuk pernyataan kuantor eksistensial mempunyai nilai benar, jika sekurang-kurangnya ada satu anggota semesta menyebabkan pernyataan benar dan salah, jika tidak ada satupun anggota semesta menyebabkan pernyataan benar.

Contoh: Jika p(x) kalimat terbuka 5 – x < 4 dan x adalah bilangan asli. Jika pernyataan tersebut dinyatakan dalam kalimat berkuantor, maka: $\forall(x), 5 - x < 4$ (bernilai salah) $\exists(x), 5 - x < 4$ (bernilai benar).

Kalimat berkuantor dapat diperluas dengan menambahkan beberapa kuantor sekaligus pada kalimat yang sama menjadi kalimat berkuantor ganda.

Contoh:

Misalkan p(x, y):" y adalah ibu dari x" Nyatakan arti simbol logika di bawah ini dalam bahasa sehari-hari dan tentukan nilai kebenarannya.

a. $(\forall x)(\exists y)p(x, y)$
b. $(\exists y)(\forall x)p(x, y)$

Penyelesaian :

a. Dari symbol diatas dapat dikemukakan arti bahwa Untuk setiap x, terdapat seorang y sedemikian sehingga y adalah ibu dari x. dengan kata lain : setiap orang mempunyai ibu.

b. Terdapatlah seorang y sehingga untuk semua orang x, y adalah ibu dari x. dengan kata lain : Ada seseorang yang merupakan ibu dari semua orang di dunia ini. Dapat dilihat bahwa dua pernyataan tersebut memiliki arti berbeda. Nilai kebenaran (a) adalah benar, sedangkan (b) salah (Filia Sari, 2021)

Ada 8 cara berbeda dalam menggunakan kuantor ∀ dan ∃ dalam 2 variabel x dan y masing-masing adalah:

- $(\forall x)\ (\forall y)$
- $(\forall y)\ (\forall x)$
- $(\exists x)\ (\exists y)$
- $(\exists y)\ (\exists x)$
- $(\forall x)\ (\exists y)$
- $(\forall y)\ (\exists x)$
- $(\exists x)(\forall y)$
- $(\exists y)(\forall x)$

Jika semua kuantornya sama, maka urutan penulisan kuantor dapat dibalik tetapi jika tidak, penulisan belum tentu dapat dibalik.

Contoh menyatakan kalimat dengan menggunakan kalimat berkuantor ganda

1. Untuk setiap bilangan bulat positif x, terdapatlah bilangan bulat positif y sedemikian hingga y<x

   Dalam simbolik logika:

   $(\forall x \in Z^+)\ (\exists y \in Z^+)$, ∋ y<x

2. Untuk semua bilangan real x dan semua bilangan real y adalah benar x +y = y+ x

   Dalam simbolik logika:

   $(\forall x \in R)\ (\forall y \in R), berlaku\ \mathrm{x} + \mathrm{y} = \mathrm{y} + \mathrm{x}$

3. Terdapat bilangan bulat positif x sedemikian sehingga untuk semua bilangan bulat positif y berlaku y<x

   Dalam simbolik logika:

   $(\exists x \in Z^+)(\forall y \in Z^+) berlaku$ y<x

4. Untuk setiap bilangan bulat positif x, terdapat bilangan bulat positif y sedemikian sehingga y < x.

   Dalam simbolik logika:

   $(\forall x \in Z^{+})(\exists y \in Z^{+}) berlaku$ y<x

Penarikan Kesimpulan Kalimat Berkuantor

Argumen adalah kumpulan pernyataan, baik tunggal maupun majemuk dimana pernyataan – pernyataan sebelumnya disebut premis-premis (p_1, p_2, p_3,…) dan pernyataan terakhir disebut konklusi/kesimpulan dari argumen (Q). Suatu premis dapat berupa aksioma, hipotesa, defenisi, atau pernyataan yang sudah dibuktikan sebelumnya.

Suatu argumen dikatakan valid jika kesimpulannya merupakan implikasi logis dari premis-premisnya. Sebaliknya, meskipun semua premis benar tetapi ada kesimpulan yang salah maka argumen tersebut dikatakan tidak valid. Dengan kata lain, penarikan kesimpulan dikatakan valid jika kebenaran konjungsi pernyataan-pernyataan yang ada pada premis mengakibatkan secara logic kebenaran konklusi (Patta, 2020). Secara sederhana dapat dikatakan bahwa suatu argumen dapat dikatakan sah/valid jika premis-premisnya benar, maka konklusinya juga benar. Dalam penarikan kesimpulan biasanya menggunakan prinsip logika dimana pernyataan disebut premis serta proses penarikan kesimpulan disebut argumentasi.

Bukti dari keabsahan suatu argument dapat dilihat melalui tabel kebenaran dapat juga menggunakan aturan penyimpulan. Jika argumennya sederhana, maka untuk membuktikan keabsahan argumen tersebut dapat menggunakan tabel kebenaran. Namun untuk argumen yang premis-premisnya kompleks harus menggunakan aturan-aturan yang ada pada logika yaitu aturan penyimpulan.

1. Bukti Keabsahan Argument Menggunakan Tabel Kebenaran

   Suatu argument disebut valid jika untuk sembarang pernyataan yang disubtitusikan kepada hipotesa, dan semuanya bernilai benar maka kesimpulannya benar. Tetapi jika ada kesimpulan yang salah, maka argumen tersebut dinyatakan tidak valid. Dengan kata lain, untuk membuktikan bahwa sebuah argumen itu valid, maka perlu mencari nilai kebenaran pernyataan kondisional dari argumen tersebut. Jika pernyataan kondisional yang bersesuaian merupakan tautologi maka argumen tersebut merupakan argumen yang valid. Langkah awal yang dilakukan untuk membuktikan argumen valid atau tidak adalah menyatakan argumen tersebut dalam symbol-simbol, seperti contoh dibawah ini:

Premis 1 : Semua bilangan genap habis dibagi 2

Premis 2 : 3 tidak habis dibagi 2

Kesimpulan : 3 bukan bilangan genap

Dalam symbol kalimat berkuantor

Misalnya didefenisikan bahwa:

G(x) : x bilangan genap

H(x) : x habis dibagi 2

Maka pernyataan diatas menjadi:

Premis 1 : $\forall(x), G(x) \ \rightarrow H(x)$

Premis 2 : $\exists(x = 3), \sim \ H(x)$

Kesimpulan : $\exists(x = 3), \sim \ G(x)$

Selanjutnya kita ubah argumen diatas menjadi pernyataan kondisional yang berkoresponden dengan argumen tersebut, yaitu dengan cara meng-konjungsi-kan premis-premis, kemudian hasilnya di-implikasi-kan dengan konklusi. Jadi, argumen contoh diatas mempunyai pernyataan kondisional yang berkoresponden yaitu:

$$\{(p \rightarrow q) \wedge\sim p\} \rightarrow\sim q$$

Pernyataan kondisional yang berkoresponden tersebut kemudian dibuat tabel kebenaran. Jika tabel kebenaran yang dihasilkan berupa tautology, maka argumen tersebut valid. Jika bukan, maka argumen tersebut tidak valid. Tabel kebenaran untuk argumen diatas sebagai berikut:

Tabel 1: Tabel Kebenaran $\{(p \rightarrow q) \wedge\sim q\} \rightarrow\sim p$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge\sim q$	$\{(p \rightarrow q) \wedge\sim q\} \rightarrow \sim p$
B	B	S	S	B	S	B
B	S	S	B	S	S	B
S	B	B	S	B	S	B
S	S	B	B	B	B	B

2. Bukti Keabsahan Argumen Menggunakan Aturan Penyimpulan

Metode yang digunakan dalam penarikan kesimpulan kalimat berkuantor adalah modus ponens, modus tollens, dan silogisme. Kesimpulan atau konklusi ditarik dari beberapa pernyataan yang diasumsikan benar.

a. Modus Ponens

Modus ponens adalah suatu cara penarikan kesimpulan berdasarkan premis 1 (p_1) dan premis 2 (p_2) jika p→ q benar, dan p benar maka q benar. Dapat juga diartikanb{(p→ q)∧p}→ q (Dibaca: Implikasi dikonjungsikan dengan p berimplikasi (menghasilkan) kesimpulan atau konklusi q

p_1: p→ q (B)

p_2: p (B)

Kesimpulan (∴): q (B)

Contoh 1: p_1: Semua mahasiswa mempunyai kartu mahasiswa
p_2: Andi adalah seorang mahasiswa

Kesimpulan (∴): Andi mempunyai kartu mahasiswa

Dalam symbol kalimat berkuantor

p_1: $\forall(x), M(x) \rightarrow K(x)$

p_2: M(a)

Kesimpulan: K(p)

Contoh 2: p_1: Setiap manusia pasti mati

p_2: Fulan adalah manusia

Kesimpulan (∴): Fulan pasti mati

Dalam symbol kalimat berkuantor

Misalnya didefenisikan bahwa:

MAN (x) : x adalah manusia

MORTAL(x) : x pasti mati

Maka pernyataan diatas menjadi:

p_1: $\forall(x), MAN(x) \rightarrow MORTAL(x)$

p_2: MAN (Fulan)

Kesimpulan: MORTAL (FULAN)

(Purwanto, dkk, 2006)

b. Modus Tollens

Suatu penarikan kesimpulan jika p→ q benar dan ~q benar, maka ~p benar

p_1: p→ q	(B)
p_2: ~q	(B)
Kesimpulan (∴): ~p	(B)

Contoh 1: p_1: Setiap bilangan bulat adalah bilangan rasional

p_2: $\sqrt{2}$ bukan bilangan rasional

Kesimpulan (∴): $\sqrt{2}$ bukan bilangan bulat

Dalam symbol kalimat berkuantor

Misalnya didefenisikan bahwa:

Z(x) : x bilangan bulat

R(x) : x bilangan rasional

Maka pernyataan diatas menjadi:

p_1: $\forall(x), Z(x) \rightarrow R(x)$

p_2: $\exists(x = \sqrt{2}), \sim R(x)$

Kesimpulan: $\exists(x = \sqrt{2}), \sim Z(x)$

Contoh 2: p_1: Semua bilangan prima dapat dibagi 1 dan dirinya sendiri

p_2: 4 dapat dibagi oleh 1, 2,dan 4

Kesimpulan (∴): 4 bukan bilangan prima

Dalam symbol kalimat berkuantor

Misalnya didefenisikan bahwa:

P(x): x bilangan prima

I (x): x dapat dibagi 1 dan dirinya sendiri

Maka pernyataan diatas menjadi:

p_1: $\forall(x), P(x) \rightarrow I(x)$

p_2: $\exists(x = 4), \sim I(x)$

Kesimpulan: $\exists(x = 4), \sim P(x)$

c. Silogisme

Silogisme adalah suatu cara penarikan kesimpulan jika p→ q benar, dan q→ r benar maka p→ r benar. Dapat juga diartikanb{(p→ q)∧(q → r)}(p → r)

p_1: p→ q (B)

p_2: q→ r (B)

Kesimpulan (∴): p→ r (B)

Contoh 1: p_1: Semua bilangan yang habis dibagi 2 adalah bilangan genap

p_2: Semua bilangan genap adalah bilangan bulat

Kesimpulan (∴): Semua bilangan yang habis dibagi 2 adalah bilangan bulat

Dalam symbol kalimat berkuantor

Misalnya didefenisikan bahwa:

Z(x) : x bilangan bulat

G(x) : x bilangan genap

H(x) : x habis dibagi 2

Maka pernyataan diatas menjadi:

p_1: $\forall(x), H(x) \rightarrow G(x)$

p_2: $\forall(x), G(x) \rightarrow Z(x)$

Kesimpulan: $\forall(x), H(x) \rightarrow Z(x)$

Contoh 2: p_1: Semua bilangan yang bersisa 2 jika dibagi 4 kongruen dalam modulo 4

p_2: Semua bilangan yang kongruen dalam modulo 4, juga kongruen dalam modulo 2

Kesimpulan (∴): Semua bilangan yang bersisa 2 jika dibagi 4, kongruen dalam modulo 2

Dalam symbol kalimat berkuantor

Misalnya didefenisikan bahwa:

Z(x) : x bilangan yang bersisa 2 jika dibagi 4

G(x) : x kongruen modulo 4

H(x) : x kongruen modulo 2

Maka pernyataan diatas menjadi:

p_1: $\forall(x), Z(x) \rightarrow G(x)$

p_2: $\forall(x), G(x) \rightarrow H(x)$

Kesimpulan: $\forall(x), Z(x) \rightarrow H(x)$

Selain aturan diatas, beberapa aturan penyimpulan yang dapat digunakan adalah:

1. Disjunctive Syllogisme

   p_1: $p \vee q$

   p_2: $\sim p$

   Kesimpulan ($\therefore$): q

   Contoh: p_1: -4 adalah bilangan ganjil atau bilangan genap

   p_2: -4 bukan bilangan ganjil

   Kesimpulan ($\therefore$): -4 adalah bilangan genap

2. Constructive Dilema

   p_1: $(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)$

   p_2: $p \vee r$

   Kesimpulan ($\therefore$): $q \vee s$

   Dilema konstruktif ini merupakan kombinasi dua argumen modus ponen

3. Destructive Dilema

   p_1: $(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)$

   p_2: $\sim q \vee \sim s$

   Kesimpulan ($\therefore$): $\sim p \vee \sim r$

4. Conjunction

p_1: p

p_2: q

Kesimpulan (∴): $p \wedge q$

Contoh: p_1: Bilangan cacah dimulai dari 0

p_2: Bilangan asli dimulai dari 1

Kesimpulan (∴): Bilangan cacah dimulai dari 0 dan Bilangan asli dimulai dari 1

Kesimpulan (∴): $p \wedge q$

5. Addition

p_1: p

Kesimpulan (∴): $p \vee q$

Artinya : p benar, maka p ∨ q benar (tidak peduli nilai benar atau nilai salah yang dimiliki q)

Untuk argumen yang lebih kompleks dapat dibuktikan seperti contoh di bawah ini:

Diberikan argumen : Premis 1 : $(p \wedge q) \rightarrow \{p \rightarrow (s \wedge t)\}$

Premis 2 : $(p \wedge q) \wedge r$

Kesimpulan : $(s \vee t)$

Apakah argumen di atas valid?

Penyelesaian: Berikut ini adalah langkah-langkah pembuktian yang dilakukan:

$(p \wedge q) \rightarrow \{p \rightarrow (s \wedge t)\}$	Premis
$(p \wedge q) \wedge r$	Premis
$(p \wedge q)$	Penyederhanaan
$p \rightarrow (s \wedge t)$	Modud Ponen
P	Penyederhanaan
$s \wedge t)$	Modus Ponen
S	Penyederhanaan
$(s \vee t)$	Jadi argumen tersebut di atas adalah valid.

Daftar Pustaka

Rerung, R. R., Fauzan, M., & Hermawan, H. (2020). Website Quality Measurement of Higher Education Services Institution Region IV Using Webqual 4.0 Method. *International Journal of Advances in Data and Information Systems*, *1*(2), 89-102.

Sari, F., R., & Aprilia, R. (2021). MATEMATIKA DISKRIT DAN AYAT AL-QUR'AN. Medan: Pusdikra Mitra Jaya

Patta, R., Latri, Bahar. (2018). Matematika Dasar. Makassar: Badan Penerbit UNM

Purwanto, H., Indriani, G., & Dayanti, E. (2006). *Logika Matematika*. Jakarta: PT ERCONTARA RAJAWALI

Profil Penulis

Beatric Videlia Remme, S.Pd., M.Pd

Penulis lahir di Rantepao, pada tanggal 6 April 1989. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Kristen Indonesia Toraja. Menyelesaikan pendidikan S1 pada Program Studi Pendidikan Matematika UKI Toraja pada tahun 2011 dan melanjutkan S2 tahun 2012 pada Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Negeri Makassar. Penulis menyelesaikan study S2 pada tahun 2015, dan sampai saat ini penulis aktif mengajar pada program studi Pendidikan Matematika Universitas Kristen Indonesia Toraja, mengajarkan mata kuliah Teori Bilangan, Kalkulus Vektor, dan Geometri, dan Kalkulus. Penulis juga aktif melakukan penelitian, beberapa penelitian yang telah dilakukan didanai oleh internal perguruan tinggi dan juga Kemenristek Dikti. Selain itu juga penulis terlibat dalam berbagai kegiatan pengabdian masyarakat khususnya di sekolah dalam rangka berkontribusi bagi peningkatan kualitas Pendidikan di Indonesia. Ketertarikan penulis dalam bidang Pendidikan matematika, juga terlihat dalam kolaborasi penulisan buku dalam bidang Pendidikan matematika.

Email Penulis: beatric@ukitoraja.ac.id

13

METODE PEMBUKTIAN LANGSUNG

Elin Herlinawati
Universitas Terbuka

Pendahuluan

Matematika merupakan ilmu pengetahuan yang didasarkan pada penalaran deduktif logis dalam memastikan kebenaran dari suatu pernyataan. Nababan *et al.* (2012) mendeksripsikan beberapa istilah terkait pernyataan dalam matematika sebagai berikut:

a. Teorema adalah suatu pernyataan yang dapat ditunjukkan kebenarannya.
b. Proposisi adalah pernyataan yang menyatakan benar atau salah namun tidak keduanya.
c. Lemma adalah suatu teorema sederhana yang biasa digunakan untuk mendukung pembuktian teorema lainnya.
d. Akibat (*corollary*) adalah suatu proposisi yang dapat diperoleh secara langsung dari suatu teorema yang telah dibuktikan.
e. Konjektur (dugaan) adalah pernyataan yang diduga benar berdasarkan data empiris (*evidence*), argumen heuristik, atau intuisi para ahli, tetapi belum berdasarkan argumen yang valid. Apabila konjektur dapat dibuktikan melalui argumen yang valid maka konjuktur berubah menjadi sebuah teorema atau proposisi.

Pernyataan Matematika erat kaitannya dengan suatu pembuktian. Menurut Hernadi (2021), pembuktian dalam Matematika adalah metode komunikasi sebuah kebenaran matematika kepada orang lain yang juga memahami bahasa matematika. Lebih lanjut, bukti matematika merupakan dasar untuk bekerja dan memahami konsep matematika, memberikan jaminan untuk pengetahuan matematika, dan merupakan dasar dari pemahaman matematika dalam upaya mengembangkan, membangun, dan mengkomunikasikan pengetahuan matematika (Hernadi, 2008).

Alur berpikir dalam mengkonstruksi bukti matematis dibangun berdasarkan fakta-fakta atau informasi yang ada. Oleh karena itu, kita dapat menggunakan berbagai metode pembuktian terhadap suatu pernyataan Matematika seperti metode pembuktian langsung dan metode pembuktian tak langsung. Pada bab ini, pembahasan difokuskan pada metode pembuktian langsung.

Catatan. Penulisan bukti matematika umumnya diakhiri dengan tanda "■", " □ ", "Q.E.D" yang merupakan singkatan dari "*quod erat demonstatum*" berarti "yang sudah didemonstrasikan/ditunjukkan", atau dengan kata "terbukti". Tanda tersebut menunjukkan bahwa proses pembuktian telah selesai dan menginformasikan bahwa kalimat berikutnya bukan merupakan bagian dari pernyataan bukti.

Metode Pembuktian Langsung

Dalam Matematika, bukti langsung adalah cara untuk menunjukkan kebenaran dari suatu pernyataan yang diberikan dengan kombinasi langsung dari fakta-fakta yang ada tanpa membuat asumsi lebih lanjut. Hal ini sejalan dengan pendapat Nicholson (2019) yang mengemukakan bahwa bukti langsung merupakan bukti dari pernyataan bersyarat dengan hipotesis pernyataan bersyarat dianggap benar dan hanya dengan menggunakan asumsi ini bersama dengan fakta yang telah ditetapkan sebelumnya (definisi, teorema, aksioma, hasil, dan lain-lain), ditunjukkan bahwa kesimpulannya harus benar.

Umumnya, pernyataan yang akan dibuktikan berbentuk implikasi $P \Rightarrow Q$ atau biimplikasi $P \Leftrightarrow Q$ atau pernyataan lain yang dapat diubah bentuknya menjadi pernyataan implikasi. Sebagai contoh, pernyataan "penjumlahan dari dua bilangan genap adalah genap" dapat ditulis ulang dalam bentuk implikasi "jika x dan y dua bilangan genap, maka $x + y$ merupakan bilangan genap".

Dalam metode pembuktian langsung, kita gunakan langkah berikut:

- Asumsikan P benar.
- Gunakan apa yang kita ketahui (informasi) tentang P dan fakta lain yang dibutuhkan untuk melakukan deduksi yang menyatakan bahwa Q benar. Hal ini akan menunjukkan bahwa $P \Rightarrow Q$ benar.

Teorema Jika P maka Q

Bukti. Misalkan P.

⋮

Jadi/Oleh karena itu, Q. ■

Gambar 13.1 *Outline* untuk pembuktian langsung (Sumber: Hammack, 2018).

Untuk menuliskan bukti matematis, kita dapat menggunakan definisi, aksioma, lemma atau teorema yang sudah dibuktikan sebelumnya. Kita juga dapat melakukan operasi/manipulasi aljabar untuk mendapatkan kalimat Matematika yang ekuivalen. Terkadang kita mungkin perlu memikirkan apa yang harus dilakukan. Kita dapat membuat sketsa awal (pra pembuktian) sebelum benar-benar menuliskan bukti dari suatu pernyataan. Hammark (2018) menjelaskan bahwa ahli matematika juga melakukan pekerjaan awal seperti halnya seniman membuat sketsa untuk lukisan mereka. Sebagai ilustrasi, perhatikan beberapa contoh berikut.

CONTOH 13.1.

Tunjukkan bahwa jika x dan y merupakan bilangan bulat ganjil, maka jumlah kedua bilangan tersebut merupakan bilangan genap.

<u>Pra Pembuktian</u>.

(i) Diketahui (P): x dan y merupakan bilangan bulat ganjil.

(ii) Akan dibuktikan (Q): $x + y$ genap.

Informasi yang perlukan adalah definisi bilangan ganjil dan definisi bilangan genap:

DEFINISI 13.1 (Nababan, dkk: 2009) Bilangan bulat n dikatakan ganjil apabila <u>ada</u> bilangan bulat k sehingga $n = 2k + 1$. Bilangan bulat m dikatakan genap apabila <u>ada</u> bilangan bulat p sehingga $m = 2p$.

Kemudian uraikan informasi dari (i) untuk mendapatkan kesimpulan (ii).

- Berdasarkan Definisi 13.1,

$$x \text{ ganjil, maka } x = 2p + 1, \text{ untuk suatu } p \in \mathbb{Z}.$$

y ganjil, maka $y = 2q + 1$, untuk suatu $q \in \mathbb{Z}$.

- Substitusi x dan y kemudian lakukan operasi aljabar untuk memperoleh bentuk bilangan $x + y$ genap,

$$x + y = (2p + 1) + (2q + 1) = 2p + 2q + 2 = 2(p + q + 1).$$

- Perhatikan bahwa $p + q + 1$ juga merupakan suatu bilangan bulat, dan dapat kita misalkan sebagai $k = p + q + 1$ sehingga $x + y$ dapat ditulis kembali dalam bentuk $x + y = 2k$.

- Karena $x + y = 2k$ untuk suatu bilangan bulat k, maka berdasarkan definisi bilangan genap, dapat disimpulkan bahwa $x + y$ merupakan bilangan genap.

Setelah mendapatkan sketsa pembuktian, tulis bukti formal dalam bentuk kalimat yang baik dan benar, terstruktur, serta sistematis.

Bukti. Misalkan x dan y merupakan bilangan bulat ganjil. Maka $x = 2p + 1$ dan $y = 2q + 1$ untuk suatu bilangan bulat p dan q. Akibatnya

$$x + y = (2p + 1) + (2q + 1) = 2p + 2q + 2 = 2k$$

dengan $k = p + q + 1$ yang merupakan suatu bilangan bulat. Jadi, berdasarkan definisi bilangan genap, $x + y$ merupakan bilangan genap.
■

Catatan. Hindari melakukan substitusi angka/bilangan untuk membuktikan kebenaran suatu pernyataan dan mengklaim hal tersebut sebagai bentuk pembuktian matematis (kecuali jika angka/bilangan tersebut digunakan sebagai pembuktian dengan contoh penyangkal). Contoh bukti yang salah dalam membuktikan Contoh 13.1: “Misalkan bilangan bulat ganjil 1 dan 3, maka 1+3=4. Karena 4 merupakan bilangan genap, maka terbukti bahwa 1+3 adalah bilangan genap”. Kalimat tersebut tidak membuktikan Contoh 13.1 benar karena argumen yang disampaikan tidak dapat berlaku untuk bilangan ganjil secara umum.

CONTOH 13.2.

Hasil kali dari sebarang dua bilangan bulat ganjil merupakan bilangan ganjil.

<u>Pra Pembuktian</u>.

Pernyataan pada contoh ini tidak berbentuk implikasi, akan tetapi dapat ditulis ulang dalam bentuk implikasi “jika P, maka Q” sebagai “jika x

dan y bilangan ganjil, maka xy merupakan bilangan ganjil" sehingga kita punya

(i) diketahui (P): x dan y merupakan bilangan bulat ganjil.

(ii) akan dibuktikan (Q): $x \cdot y$ ganjil.

Informasi yang perlukan adalah definisi bilangan ganjil (lihat Definisi 13.1). Kemudian uraikan informasi dari (i) untuk mendapatkan kesimpulan (ii) seperti pada Contoh 13.1. Terakhir, tulis bukti formal secara sistematis dan terstruktur seperti berikut.

***Bukti*.** Misalkan x dan y merupakan bilangan bulat ganjil. Maka $x = 2p + 1$ dan $y = 2q + 1$ untuk suatu $p, q \in \mathbb{Z}$. Akibatnya

$$x \cdot y = (2p + 1)(2q + 1) = 4pq + 2p + 2q + 1 = 2k + 1$$

dengan $k = p + q + 1$ merupakan bilangan bulat. Jadi, berdasarkan definisi bilangan ganjil, $x \cdot y$ merupakan bilangan ganjil. ■

CONTOH 13.3.

Jika x adalah bilangan bulat genap, maka $x^2 - 6x + 5$ merupakan bilangan ganjil.

Bukti. Misalkan x adalah bilangan bulat genap. Berdasarkan definisi bilangan genap, maka $x = 2a$ untuk suatu $a \in \mathbb{Z}$, sehingga $x^2 - 6x + 5 = (2a)^2 - 6(a) + 5 = 4a^2 - 12a + 5 = 4a^2 - 12a + 4 + 1 = 2(2a^2 - 6a + 2) + 1$. Misalkan $b = 2a^2 - 6a + 2,$ maka $b \in \mathbb{Z}$. Dengan demikian, $x^2 - 6x + 5 = 2b + 1$ untuk suatu $b \in \mathbb{Z}$. Berdasarkan definisi bilangan ganjil, dapat disimpulkan bahwa $x^2 - 6x + 5$ merupakan bilangan ganjil. ■

CONTOH 13.4.

Kuadrat dari bilangan bulat genap adalah genap.

Bukti. Misalkan x adalah bilangan bulat genap. Akan ditunjukkan bahwa x^2 genap. Berdasarkan definisi bilangan genap, maka $x = 2a$ untuk suatu $a \in \mathbb{Z}$, sehingga $x^2 = (2a)^2 = 4a^2 = 2(2a^2)$. Misalkan $k = 2a^2$, maka $k \in \mathbb{Z}$. Dengan demikian $x^2 = 2k$ untuk suatu $k \in \mathbb{Z}$. Hal ini menunjukkan bahwa x^2 merupakan bilangan genap. ■

Selanjutnya, untuk menemukan alur pemikiran dalam menuliskan bukti matematika, Solow (2014) menjelaskan beberapa strategi yang dapat digunakan dalam mengkonstruksi alur berpikir dalam membuktikan suatu pernyataan, diantaranya yaitu strategi pembuktian dengan proses maju (*forward process*), proses mundur (*backward process*), dan gabungan proses maju-mundur (*forward-backward process)*.

a. Pembuktian Langsung dengan Proses Maju *(Forward Process)*

Ketika membuktikan suatu implikasi "jika P maka Q", kita dapat mengasumsikan bahwa P benar dan menggunakan informasi tersebut untuk mencapai kesimpulan Q benar. Alur berpikir dalam pembuktian ini menggunakan alur maju mulai dari menguraikan informasi yang terkandung dalam P (hipotesis) dengan implikasi logis hingga diperoleh Q (kesimpulan yang diinginkan). Adapun langkah-langkah yang dapat dilakukan yaitu:

(1) Melakukan analisis pra pembuktian dengan menggunakan alur maju.

(2) Tulis bukti formal

CONTOH 13.5.

Jika x ganjil, maka x^2 ganjil.

<u>Pra Pembuktian</u>.

(i) Diketahui (P): x ganjil.

(ii) Akan dibuktikan (Q): x^2 ganjil.

Informasi yang diperlukan adalah definisi bilangan ganjil. Kemudian uraikan informasi dari (i) baik dengan menggunakan definisi/aksioma/lemma, maupun operasi aljabar yang dibutuhkan untuk mendapatkan kesimpulan (ii). Secara ringkas, proses tersebut dapat dilihat pada Tabel 13.1.

Tabel 13.1 Pra Pembuktian dengan Proses Maju

Pernyataan		Alasan
P	x ganjil	hipotesis awal
P1	$x = 2k + 1$, k bil. bulat	karena x ganjil
P2	$x^2 = (2k + 1)^2$	karena $x = 2k + 1$
P3	$x^2 = 4k^2 + 2k + 1$	operasi aljabar
P4	$x^2 = 2m + 1$	manipulasi aljabar, dengan $m = 2k^2 + 2k$ bil. bulat
Q	x^2 ganjil	kesimpulan

Selanjutnya, tulis bukti formal dalam bentuk kalimat terstruktur dan sistematis berdasarkan uraian pada Tabel 13.1.

Bukti. Misalkan x ganjil. Maka $x = 2k + 1$ untuk suatu bilangan bulat k. Akibatnya

$$x^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 2k + 1 = 2m + 1$$

dengan $m = 2k^2 + 2k$ yang merupakan bilangan bulat. Jadi, x^2 ganjil. ∎

CONTOH 13.6.

Misalkan $a, b,$ dan c merupakan bilangan bulat. Jika $a|b$ dan $b|c$, maka $a|c$.

<u>Pra Pembuktian</u>.

(i) Diketahui (P): $a, b,$ dan c merupakan bilangan bulat.

(ii) Akan dibuktikan (Q): $a|c$.

Informasi yang diperlukan adalah definisi "habis membagi". Kemudian uraikan informasi dari (i) baik dengan menggunakan definisi/lemma maupun operasi aljabar yang dibutuhkan untuk mendapatkan kesimpulan (ii).

Bukti. Misalkan $a|b$ dan $b|c$. Berdasarkan definisi, $a|b$ berarti $b = ka$ untuk suatu $k \in \mathbb{Z}$ dan $b|c$ berarti $c = mb$ untuk suatu $m \in \mathbb{Z}$. Perhatikan bahwa $c = mb = mka$. Pilih $n = mk$. Maka $c = na$ untuk $n \in \mathbb{Z}$. Hal ini menunjukkan bahwa $a|c$. ∎

CONTOH 13.7.

Misalkan x dan y merupakan bilangan positif. Jika $x \leq y$, maka $\sqrt{x} \leq \sqrt{y}$.

Bukti. Misalkan $x \leq y$. Tambahkan $(-y)$ pada kedua ruas, diperoleh $x - y \leq 0$. Faktorkan menjadi $(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \leq 0$. Bagi kedua ruas dengan bilangan positif $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ sehingga diperoleh $\sqrt{x} - \sqrt{y} \leq 0$. Akibatnya, $\sqrt{x} \leq \sqrt{y}$. ∎

b. Pembuktian Langsung dengan Proses Mundur *(The Backward Process)*

Kita juga dapat memanfaatkan informasi yang diuraikan dari kesimpulan dengan langkah-langkah yang dapat membawa pada hipotesis awal. Strategi ini dikenal sebagai proses mundur (*backward process*). Solow (2014) mengungkapkan bahwa strategi proses mundur dapat menjawab pertanyaan kunci “bagaimana kita dapat menyimpulkan bahwa pernyataan Q benar?”. Proses mundur dimulai dari “bagaimana kita dapat menunjukkan bahwa Q benar dengan memberikan pernyataan baru Q1 yang mempunyai sifat: jika Q1 benar maka Q benar”. Proses ini dilakukan secara berulang hingga berakhir pada pernyataan P. Perhatikan contoh berikut.

CONTOH 13.8.

Jika x dan y bilangan real positif, maka $2\sqrt{xy} \leq x + y$.

Pra Pembuktian.

(i) Diketahui (P): x dan y bilangan real positif.

(ii) Akan dibuktikan (Q): $2\sqrt{xy} \leq x + y$.

Untuk membuktikan $2\sqrt{xy} \leq x + y$ ketika x dan y bilangan real positif, kita dapat menggunakan alur mundur mencari ekuivalensi dari ketaksamaan tersebut.

$$\begin{aligned} 2\sqrt{xy} \leq x + y \Leftrightarrow \left(2\sqrt{xy}\right)^2 &\leq (x+y)^2 \Leftrightarrow 4xy \\ &\leq x^2 + 2xy + y^2 \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Karena ketaksamaan di atas saling ekuivalen, maka dapat dikatakan bahwa $2\sqrt{xy} \leq x + y$ ketika $x, y \in \mathbb{R}$. Karena $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$ maka juga berlaku $2\sqrt{xy} \leq x + y$ ketika $x, y \in \mathbb{R}^+$. Sekarang, kita tulis bukti formal sebagai berikut.

Bukti. Misalkan x dan y bilangan real positif. Maka $(x-y)^2 \geq 0$sehingga $x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$. Tambahkan kedua ruas dengan $4xy$ diperoleh $x^2 + 2xy + y^2 \geq 4xy$ sehingga $(x+y)^2 \geq 4xy$. Berdasarkan Contoh 13.7, diperoleh $x + y \geq 2\sqrt{xy}$. ■

c. Pembuktian Langsung dengan *Forward-Backward Process*

Selain menggunakan strategi *forward* dan *backward process*, kita juga dapat menggunakan stategi dua arah. Menguraikan fakta dari P (hipotesis) dengan alur maju dan mencari jawaban bagaimana mendapatkan kesimpulan Q dengan alur mundur. Strategi ini dikenal sebagai *forward-backward process*. Perhatikan contoh berikut.

CONTOH 13.9.

Segitiga XYZ dengan panjang sisi x dan y dan panjang hipotenusa z mempunyai luas $\frac{z^2}{4}$ merupakan segitiga sama kaki.

<u>Pra Pembuktian</u>.

Tulis ulang pernyataan Contoh 13.9 dalam bentuk implikasi: "jika segitiga XYZ dengan panjang sisi x dan y dan panjang hipotenusa z mempunyai luas $\frac{z^2}{4}$, maka segitiga XYZ merupakan segitiga sama kaki" sehingga kita punya:

(i) Diketahui (P): Luas segitiga XYZ $= \frac{z^2}{4}$, dengan panjang sisi x dan y serta hipotenusa z.

(ii) Akan dibuktikan (Q): segitiga XYZ merupakan segitiga sama kaki.

Informasi yang dapat diperoleh/diuraikan dari (i) adalah (1) segitiga XYZ merupakan segitiga siku-siku; (2) rumus luas segitiga; (3) rumus menghitung sisi miring; (4) operasi aljabar tertentu. Adapun informasi yang perlu ditunjukkan untuk mencapai kesimpulan (ii) adalah (1) sifat segitiga sama kaki. Berikut ringkasan alur penalaran proses pembuktian dengan proses maju-mundur.

Tabel 13.2 Pra Pembuktian dengan Proses Maju-Mundur

Pernyataan		Alasan	
P	Luas segitiga XYZ adalah $\frac{z^2}{4}$	hipotesis awal	
P1	$\frac{xy}{2} = \frac{z^2}{4}$	$Luas\ \triangle = \frac{1}{2}(alas)(tinggi)$	
P2	$x^2 + y^2 = z^2$	Teorema Phytagoras	Proses maju
P3	$\frac{xy}{2} = \frac{x^2 + y^2}{4}$	Substitusi P2 ke P1	
P4	$x^2 - 2xy + y^2 = 0$	operasi aljabar dari P3	
P5	$(x - y)^2 = 0$	Faktor dari P4	
Q2	$x - y = 0$	Faktor dari P5 atau manipulasi aljabar dari Q1	
Q1	$x = y$	sifat segitiga sama kaki, manipulasi aljabar, tambahkan y pada kedua ruas P6	Proses mundur
Q	Segitiga XYZ sama kaki	Kesimpulan	

Bukti. Misalkan Luas segitiga XYZ adalah $\frac{z^2}{4}$ dengan panjang sisi x dan y dan panjang hipotenusa z. Untuk menunjukkan segitiga XYZ sama kaki, cukup ditunjukkan bahwa $x = y$. Dengan kata lain, $x - y = 0$.

Perhatikan bahwa luas segitiga XYZ adalah $\frac{xy}{2} = \frac{z^2}{4}$. Dengan menggunakan Teorema Phytagoras diperoleh $\frac{xy}{2} = \frac{x^2+y^2}{4}$ sehingga $x^2 - 2xy + y^2 = 0$. Faktorisasi menjadi $(x - y)^2 = 0$. Akibatnya, $x - y = 0$. Hal ini menunjukkan bahwa segitiga XYZ sama kaki. ■

Daftar Pustaka

Hammack, R. (2018). *Book of Proof - Third edition*. Richmond: Virginia Commonwealth University.

Hernadi, J. (2008). Metoda Pembuktian dalam Matematika. *Jurnal Pendidikan Matematika, 2(1), 1-14.*

Hernadi, J. (2021). *Fondasi Matematika dan Metode Pembuktian*. Jakarta: Erlangga.

Nababan, S.M., Sugimin, & Warsito. (2012). *BMP MATA4101 Pengantar Matematika* (*Edisi 1)*. Tangerang Selatan: Universitas Terbuka.

Nicholson, N.R. (2019). *A Transition to Proof: An Introduction to Advanced Mathematics (1st ed.).* Chapman and Hall/CRC. https://doi.org/10.1201/9780429259838

Solow, D. (2014). *How to read and do proofs (6th edition)*. John Wiley & Sons Inc

Profil Penulis

Elin Herlinawati, S.Pd., M.Si.

Penulis lahir di Serang-Banten, 1 Februari 1990. Ketertarikan Penulis terhadap ilmu Matematika dan dunia pendidikan dimulai sejak lulus dari bangku sekolah menengah atas pada tahun 2007. Hal tersebut mengantarkan Penulis untuk memilih program studi S1 Pendidikan Matematika di Universitas Sultan Ageng Tirtayasa dan lulus pada tahun 2011. Setelah mengabdi selama empat tahun di dunia pendidikan pada jenjang sekolah menengah, Penulis berusaha membekali diri dengan ilmu Matematika secara lebih mendalam dengan melanjutkan studi S2 Matematika di Institut Teknologi Bandung pada tahun 2015 dan berhasil lulus pada tahun 2017. Hal tersebut mengantarkan Penulis berkarir sebagai dosen Matematika di Universitas Terbuka pada tahun 2018.

Penulis memfokuskan penelitiannya pada bidang Analisis dan Geometri, serta beberapa bidang matematika lainnya. Sebagian besar penelitian yang dilakukan Penulis mendapatkan hibah internal perguruan tinggi termasuk penelitian skema kolaborasi yang melibatkan mitra perguruan tinggi ataupun instansi lainnya. Selain menulis artikel, Penulis juga menulis beberapa *book chapter* nasional yang diterbitkan oleh internal perguruan tinggi.

Email Penulis: elin@ecampus.ut.ac.id

14

METODE PEMBUKTIAN TIDAK LANGSUNG *(INDIRECT PROOF)*

Irene Devi Damayanti
Universitas Kristen Indonesia Toraja

Pendahuluan

Fakta matematika yang dipelajari memang tidak semua harus dipahami buktinya. Hal ini diakibatkan oleh berbagai faktor, diantaranya faktor kepadatan materi dan keterbatasan waktu menjadi kendala klasik oleh pengampu matematika. Beberapa pembuktian tidak hanya membuktikan suatu fakta, tetapi juga harus dapat memberikan penjelasan atau alasan terhadap fakta tersebut. Terkadang, kita diperhadapkan dengan pendirian seseorang yang sangat kuat bahwa suatu konjektur adalah benar. Keyakinan ini mungkin berasal dari penjelasan-penjelasan informal yang mereka jumpai dari berbagai kasus dalam kehidupan sehari-hari. Hal ini menjadikan mereka yakin bahwa tidak ada keraguan terhadap konjektur tersebut, akan tetapi belum tentu berlaku untuk semua kalangan atau kelompok tertentu. Dari sinilah bukti dapat dijadikan sebagai sarana untuk meyakinkan seseorang tentang kebenaran suatu ide. Akan tetapi, untuk memberikan bukti formal tentang kebenaran suatu fakta tidaklah mudah.

Keindahan matematika bagi orang awam terlihat pada pola dan struktur objek matematika, seperti bangun geometri, bilangan, simulasi matematika dan sebagainya. Akan tetapi, bagi seorang matematikawan keindahan tersendiri dari matematika terletak pada pola penalaran yang memiliki interkoneksi terhadap argumen-argumen logis. Meskipun demikian, membuktikan merupakan tantangan tersendiri bagi para matematikawan. Namun, hal ini memberikan inspirasi dan motivasi tersendiri untuk memberikan rasa penasaran dan begitu terselesaikan maka diperoleh kepuasan intelektual.

Logika dan pembuktian merupakan hal terpenting dari matematika. Kemampuan berpikir logis dan membaca pembuktian akan memperluas pemahaman seseorang tentang matematika dan akan memudahkan untuk mengaplikasikan ide-ide matematika pada berbagai situasi. Berkaitan dengan hal tersebut, definisi juga merupakan bagian terpenting dari logika dan pembuktian. Topik-topik dalam matematika selalu diawali dengan membuat definisi-definisi baru. Selanjutnya, dari definisi kemudian dihasilkan sejumlah teorema. Teorema merupakan salah satu perwujudan dari objek matematika yang masih perlu untuk dibuktikan kebenarannya. Pembuktian suatu teorema biasanya dimulai dengan pernyataaan-pernyataan tertentu yang telah diterima nilai kebenarannya, kemudian dilanjutkan dengan argumentasi menuju suatu kesimpulan.

Bukti (*proof*) merupakan suatu argumen dari suatu premis ke suatu kesimpulan yang dapat digunakan untuk meyakinkan seseorang untuk dapat menerima kesimpulan baru. Pembuktian matematika didasarkan pada dua hal, yaitu pembuktian yang didasarkan pada pernyataan serta definisi yang jelas dan pembuktian yang didasarkan pada prosedur penarikan kesimpulan yang valid. Untuk menentukan apakah argumen tersebut valid atau tidak, maka dapat dilakukan dengan menggunakan tabel kebenaran yang sesuai dengan argumen tersebut. Secara umum, terdapat dua validitas pembuktian, yaitu pembuktian langsung (*direct proof)* dan pembuktian tidak langsung (*indirect proof*).

Pembuktian Tidak Langsung (*Indirect Proof)*

Pemanfaatan pembuktian tidak langsung di dalam kehidupan nyata sehari-hari sering digunakan meskipun tidak disadari sebagai pembuktian tidak langsung. Pembuktian tidak langsung merupakan strategi yang sangat hebat dikarenakan penalaran tersebut dapat digunakan untuk membuktikan kebenaran hampir untuk semua pernyataan (Cooney dkk, 1975).

Sebagai contoh, ketika kita sedang asyik membaca buku tiba-tiba saja listrik padam. Jika kita ingin menentukan sumber padamnya listrik tersebut, apa yang dapat kita lakukan? yang terpikirkan pertama kali adalah penyebab padamnya listrik terletak di gardu. Hal ini didasarkan pada alasan bahwa jika listrik di gardu padam, maka listrik di rumah dan di tetangga juga akan padam. Namun, dengan melihat listrik tetangga masih menyala, maka kita akan menarik kesimpulan bahwa pemisalan tentang penyebabnya adalah listrik di gardu yang padam adalah salah. Dengan demikian, penyebab listrik padam tersebut bukan di gardu, tetapi sumber padamnya listrik adalah di rumah sendiri.

Pembuktian langsung suatu pernyataan matematis adakalanya terasa sulit. Jika hal ini terjadi, maka kita dapat menggunakan metode lain, yaitu dengan menggunakan metode pembuktian tidak langsung. Jika pada pembuktian langsung dilakukan dengan meyakinkan seseorang tentang kebenaran suatu pernyataan dan pembuktiannya biasanya dengan menggunakan silogisma, seperti $p \to q, q \to r, r \to s, \dots, y \to z$, sehingga dapat disimpulkan bahwa $p \to z$ seperti yang harus dibuktikan. Hal ini berbeda dengan pembuktian tidak langsung, pemisalan awalnya adalah lawan atau ingkaran dari pernyataan yang akan dibuktikan. Pembuktian tidak langsung merupakan suatu pembuktian pernyataan atau sifat matematika dengan mengubah susunan pernyataan tersebut. Pada metode ini, negasi dari konklusi $(\sim q)$ didaftarkan sebagai premis tambahan dengan tujuan formal adalah menemukan suatu kontradiksi (salah).

Pembuktian Tidak Langsung dengan Kontraposisi

Salah satu metode pembuktian tidak langsung adalah kontraposisi. Menurut Hernadi, (2013) kontraposisi merupakan gabungan dari konvers (kebalikan dari implikasi) dan invers (negasi dari implikasi). Sedangkan Bahri, (2016) menyatakan bahwa metode kontraposisi adalah suatu metode pembuktian suatu pernyataan yang dilakukan dengan menggunakan pernyataan lain yang ekivalen dengan pernyataan yang diberikan. Pada prinsipnya, tidak ada aturan baku dalam menentukan metode pembuktian, yaitu apakah menggunakan pembuktian langsung ataupun pembuktian tidak langsung. Dapat disimpulkan bahwa kontraposisi merupakan kebalikan dari invers itu sendiri.

Pembuktian dengan menggunakan kontraposisi didasari oleh suatu pernyataan kondisional ekuivalensi logis dengan kontraposisinya. Menurut Usodo (2011), konsep dasar pada metode pembuktian tidak langsung adalah dengan memanfaatkan sifat ekuivalen dari suatu pernyataan implikasi, dimana $p \to q$ ekuivalen dengan nilai kebenaran kontraposisinya $\sim q \to \sim p$, atau dapat dituliskan $p \to q \equiv \sim q \to \sim p$. Sehingga, untuk membuktikan pernyataan $p \to q$ akan ditunjukkan bahwa $\sim q$ akan mengakibatkan $\sim p$. Hal inilah yang dijadikan sebagai dasar pada pembuktian tidak langsung dengan kontraposisi. Konsep ini kita awali dengan mengasumsikan bahwa $\sim q$ benar, maka harus dibuktikan bahwa $\sim p$ juga benar. Dengan demikian, jika pernyataan kontraposisinya bernilai benar, maka pernyataan semula juga pasti bernilai benar.

Pernyataan implikasi merupakan proposisi majemuk yang menyatakan hubungan sebab-akibat yang menggunakan kata penghubung “jika …, maka …”. Secara metematis, implikasi dinotasikan dengan $p \rightarrow q$, dimana p disebut sebagai anteseden atau sebab, sedangkan q disebut sebagai konsekuen atau akibat. Misalkan, terdapat dua buah proposisi, yaitu proposisi p dan proposisi q. Proposisi jika p maka q (p implikasi q) merupakan proposisi majemuk yeng bernilai salah, jika proposisi p bernilai benar dan proposisi q bernilai salah. Pernyataan implikasi pada proposisi majemuk dapat dilihat pada Tabel 1 berikut (Kusumah, 2013):

Tabel 14.1. Implikasi pada Proposisi Majemuk

p	q	$p \rightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	B
S	S	B

Dari Tabel 1 di atas, dapat kita lihat bahwa bentuk implikasi akan selalu bernilai benar jika anteseden bernilai salah, apapun nilai kebenaran dari konsekuennya.

Pada pembuktian tidak langsung, dibutuhkan perhatian terhadap asumsi awal yang bernilai benar. Misalkan, dengan menggunakan $\sim q$ sebagai asumsi awal, maka perlu dibuktikan bahwa $\sim p$ bernilai benar sesuai dengan konsep dasar $p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$. Jika pernyataan kontraposisinya bernilai benar, maka pernyataan semula juga pasti bernilai benar (Yassine dkk, 2014).

Contoh 14.1. Buktikanlah teorema, Jika $a + b > 10$, maka $a > 5$ atau $b > 5$ dengan menggunakan metode pembuktian tidak langsung kontraposisi!

Bukti:

Dari teorema di atas, dapat kita lihat bahwa teorema tersebut berbentuk implikasi jika $p \rightarrow q$, di mana:

$p \equiv \; a + b > 10,$

$q \equiv \; a > 5$ atau $b > 5$

Sedangkan,

$\sim p \equiv \; a + b \leq 10,$

$\sim q \equiv \; a \leq 5$ atau $b \leq 5$

Sehingga, jika $a \leq 5$ dan $b \leq 5$, maka $a + b \leq 5 + 5 = 10$.

Jadi, dari pembuktian tersebut dapat ditarik kesimpulan bahwa jika $\sim q$ bernilai benar, maka $\sim p$ juga bernilai benar.

Contoh 14.2. Buktikan pernyataan, Jika x^2 bilangan ganjil, maka x juga adalah bilangan ganjil!

Bukti:

Pernyataan ini akan terasa sangat sulit jika kita buktikan dengan metode pembuktian langsung. Sebagai contoh, karena x^2 ganjil, maka dapat dituliskan $x = 2m + 1$, dimana m adalah suatu bilangan asli. Sehingga, diperoleh $x = \sqrt{2m + 1}$ tidak dapat ditarik kesimpulan bahwa apakah bilangan tersebut ganjil atau tidak.

Selanjutnya, kita buktikan pernyataan tersebut dengan menggunakan metode pembuktian tidak langsung pada kontraposisinya. Kontraposisi dari pernyataan tersebut, yaitu:

"Jika x adalah bilangan genap, maka x^2 bilangan genap ".

Karena, x genap, maka dapat dituliskan $x = 2n$, dimana n adalah suatu bilangan bulat. Sehingga, diperoleh:

$x^2 = (2n)^2 = 2\,(2n^2) = 2m$, yang merupakan suatu bilangan genap.

Contoh 14.3. Buktikan pernyataan, Jika $3n + 2$ bilangan ganjil, maka n juga adalah bilangan ganjil!

Bukti:

Dari pernyataan di atas, dapat kita lihat bahwa pernyataan tersebut berbentuk implikasi jika $p \rightarrow q$, di mana:

$p \,:\, 3n + 2$, bilangan ganjil

$q \,:\, n$, bilangan ganjil

Sepintas, pernyataan ini akan terasa sangat sulit jika kita buktikan dengan metode pembuktian langsung. Selanjutnya, kita buktikan pernyataan tersebut dengan menggunakan metode pembuktian tidak langsung pada kontraposisinya. Kontraposisi dari pernyataan tersebut, yaitu:

"Jika n adalah bilangan genap, maka $3n + 2$ bilangan genap ",

dapat dituliskan, sebagai berikut:

$\sim q$: n, bilangan genap

$\sim p$: $3n + 2$, bilangan genap

Misalkan, $\sim q$ bernilai benar, yakni n adalah bilangan genap, akan dibuktikan bahwa $\sim p$ juga bernilai benar, yakni $3n + 2$ adalah bilangan genap. Karena, n genap, maka dapat dituliskan $n = 2k$, dimana k adalah suatu bilangan bulat. Sehingga, diperoleh:

$$\begin{aligned} 3n + 2 &= 3(2k) + 2 \\ &= 6k + 2 \\ &= 2(3k + 1) \end{aligned}$$

Misal, $m = 3k + 1$, sehingga diperoleh:

$$3n + 2 = 2m$$

Jadi, $3n + 2$ adalah suatu bilangan genap. Sehingga, terbukti bahwa pernyataan tersebut bernilai benar, dengan demikian pernyataan semula juga terbukti bernilai benar.

Contoh 14.4. Buktikan, Jika m^3 bilangan irrasional, maka m juga adalah bilangan irrasional!

Bukti:

Kontraposisi dari pernyataan tersebut, yaitu:

"Jika m adalah bilangan rasional, maka m^3 bilangan rasional ".

Misalkan, benar bahwa m adalah bilangan rasional, maka dapat dituliskan bahwa $m = \frac{a}{b}$, dimana a dan b merupakan suatu bilangan bulat dan $b \neq 0$. Sehingga, diperoleh:

$$\begin{aligned} m^3 &= \left(\frac{a}{b}\right)^3 \\ &= \frac{a^3}{b^3} \end{aligned}$$

Misalkan, $k = a^3$ dan $l = b^3$, sehingga diperoleh:

$$m^3 = \frac{k}{l}$$

dimana k dan l merupakan suatu bilangan bulat dan $l \neq 0$. Jadi, m^3 adalah bilangan rasional.

Dengan demikian, terbukti bahwa kontraposisi dari penyataan tersebut bernilai benar, sehingga pernyataan semula juga terbukti bernilai benar.

Pembuktian Tidak Langsung dengan Kontradiksi

Dalam pembelajaran logika, suatu pernyataan pasti memiliki nilai kebenaran yang berlawanan dengan nilai kebenaran ingkarannya. Pembuktian tidak langsung dengan kontradiksi diawali dengan melakukan pembuktian bahwa ingkaran dari pernyataan implikasi tersebut adalah bernilai salah. Dengan demikian, dapat ditarik kesimpulan bahwa dengan terbuktinya ingkaran tersebut salah, maka pernyataan implikasi pasti bernilai benar. Selanjutnya, kesalahan tersebut akan dibuktikan dengan suatu kontradiksi. Kontradiksi terdiri dari dua buah pernyataan yang saling bertentangan. Pembuktian tidak langsung dengan kontradiksi dibedakan atas 2 bentuk bukti, sebagai berikut (Widodo, 2007):

1. Untuk membuktikan bahwa pernyataan p bernilai benar, maka dapat ditunjukkan bahwa $\sim p$ merupakan suatu pernyataan yang bernilai salah atau kontradiksi.
2. Untuk membuktikan teorema $p \rightarrow q$, dilakukan dengan mengasumsikan bahwa p dan $\sim q$ bernilai benar, selanjutnya mendeduksikan pernyataan C yang bernilai salah. Karena $p \wedge \sim q \rightarrow C$ bernilai benar dan C bernilai salah, maka dapat ditarik kesimpulan bahwa $p \wedge \sim q$ dalam kalimat kondisional tersebut adalah salah. Sehingga, $\sim(p \wedge \sim q) \equiv p \rightarrow q$ adalah bernilai benar.

Secara simbolik, kedua argumen tersebut di atas dapat dituliskan, sebagai berikut:

1. **Bentuk Pertama,**

   $\underline{\text{Premis } 1 \equiv \sim p \rightarrow C}$

   Konklusi $\equiv p$

   Bukti:

Tabel 14.2. Tabel Bukti Bentuk Pertama

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{\sim p}$	$\boldsymbol{C}$	$\boldsymbol{\sim p \to C}$	$\boldsymbol{\sim p \to C \Leftrightarrow p}$
B	S	S	B	B
S	B	S	S	B
(1)	**(2)**	**(3)**	**(4)**	**(5)**

Pada Tabel 14.2 kolom (5), ditunjukkan bahwa argumen di atas adalah valid.

2. **Bentuk Kedua,**

Premis 1 $\equiv \underline{p \wedge \sim q \to C}$

Konklusi $\equiv p \to q$

Bukti:

Tabel 14.3. Tabel Bukti Bentuk Kedua

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{\sim q}$	$\boldsymbol{p \wedge \sim q}$	$\boldsymbol{C}$	$\boldsymbol{p \wedge \sim q \to C}$	$\boldsymbol{p \to q}$	$\boldsymbol{(p \wedge \sim q) \to C \Leftrightarrow p \to q}$
B	B	S	S	S	B	B	B
B	S	B	B	S	S	S	B
S	B	S	S	S	B	B	B
S	S	B	S	S	B	B	B
(1)	**(2)**	**(3)**	**(4)**	**(5)**	**(6)**	**(7)**	**(8)**

Pada Tabel 14.3 kolom (6) dan (7) adalah ekuivalen, akibatnya pada kolom (8) adalah memenuhi tautologi.

Contoh 14.5. Buktikan, Jika $y > 0$, maka $\frac{1}{y} > 0$, di mana y merupakan suatu bilangan real!

Bukti:

Dari teorema di atas, dapat kita lihat bahwa pernyataan tersebut berbentuk implikasi jika $p \to q$, di mana:

$$p \equiv y > 0$$

$$q \equiv \frac{1}{y} > 0$$

Berdasarkan argumen bentuk ke-2 di atas, yaitu $(p \wedge \sim q) \rightarrow C \Leftrightarrow p \rightarrow q$, sehingga pembuktian ini dapat kita awali dengan melakukan suatu pemisalan, yaitu dengan memisalkan $y > 0$ dan $\frac{1}{y} \leq 0$.

Karena, $y > 0$ maka kedua ruas pertidaksamaan masing-masing dapat dikalikan dengan y, diperoleh sebagai berikut:

$$(\frac{1}{y})(y) \leq (0)(y) \Leftrightarrow 1 \leq 0$$

diperoleh hasil yang kontradiksi dengan kenyataan bahwa $1 > 0$. Dengan demikian, dapat ditarik kesimpulan bahwa benar, jika $y > 0$, maka $\frac{1}{y} > 0$.

Contoh 14.6. Buktikan, Jika $5m + 4$ adalah bilangan bulat ganjil, maka m adalah bilangan bulat ganjil!

Bukti:

Dari pernyataan di atas, dapat kita lihat bahwa pernyataan tersebut berbentuk implikasi jika $p \rightarrow q$, di mana:

p : $5m + 4$, bilangan bulat ganjil

q : m, bilangan bulat ganjil

Pembuktian ini kita awali dengan mengasumsikan bahwa ingkarannya benar, yaitu $5m + 4$ bilangan bulat ganjil dan m bilangan bulat genap.

Karena, m adalah bilangan bulat genap, maka dapat dituliskan $m = 2k$, dimana k adalah suatu bilangan bulat. Sehingga, diperoleh:

$$\begin{aligned} 5m + 4 &= 5(2k) + 4 \\ &= 10k + 4 \\ &= 2(5k + 2) \end{aligned}$$

Misal, $n = 5k + 2$, sehingga diperoleh:

$$5m + 4 = 2n,$$

yang merupakan suatu bilangan bulat genap. Kontradiksi dengan mengasumsikan bahwa $5m + 4$ merupakan bilangan bulat ganjil. Jadi, asumsi tersebut di atas adalah salah. Maka, pernyataan semula pastilah bernilai benar. Dengan demikian, dapat ditarik kesimpulan bahwa terbukti, jika $5m + 4$ adalah bilangan bulat ganjil, maka m adalah bilangan bulat ganjil.

Pembuktian Tidak Langsung dengan Contoh Penyangkal *(Counter Example)*

Jika suatu teorema dikatakan benar, maka dapat dibuktikan dengan menunjukkan bahwa teorema tersebut bernilai benar untuk semua contoh yang telah diberikan. Begitupun sebaliknya, jika suatu teorema dikatakan salah, maka dapat dibuktikan dengan cukup menunjukkan bahwa teorema tersebut bernilai salah untuk sebuah contoh yang telah diberikan. Pembuktian tidak langsung dengan contoh penyangkal atau *counter example* dapat digunakan untuk membuktikan bahwa untuk setiap nilai x berlaku $p(x)$ salah atau untuk setiap nilai x tidak berlaku $p(x)$ benar. Dengan demikian, untuk membuktikan bahwa untuk setiap nilai x berlaku $p(x)$ salah, maka cukup dibuktikan dengan menunjukkan bahwa elemen tersebut tidak memenuhi sifat dari $p(x)$, (Widodo, 2007).

Secara umum, teorema biasanya dinyatakan dalam bentuk kondisional, Jika p maka q atau dituliskan $p \rightarrow q$. Dengan demikian, untuk membuktikan pernyataan tersebut dengan pembuktian tidak langsung dengan contoh penyangkal atau *counter example,* maka pernyataan tersebut perlu dinyatakan secara eksplisit dalam bentuk kuantor. Model pembuktian tersebut sering digunakan dalam pengembangan perluasan semesta pada suatu teorema, dikarenakan model ini dapat digunakan untuk membuktikan nilai kesalahan suatu teorema.

Contoh 14.6. Buktikan teorema, “Misalkan $I = [a, b]$ dan $f: I \rightarrow R$. Jika f memiliki bentuk turunan pada $c \epsilon I$, maka f kontinu pada c ”!

Bukti:

- Pertama, nyatakan bentuk teorema tersebut dalam bentuk kuantor, “untuk setiap $c \epsilon I$ dan $f$memiliki turunan pada c, maka f kontinu pada c”. Kemudian, ambil sebarang $x \epsilon I, x \neq c$, maka:

$$f(x) - f(c) = \left(\frac{f(x) - f(c)}{x - c}\right)(x - c)$$

Karena $f'(c)$, maka diperolah:

$$\lim_{x \to c}\big(f(x) - f(c)\big)$$

$$= \left(\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}\right)\left(\lim_{x \to c}(x - c)\right)$$

$$= \ f'^{(c)}.0 = 0$$

Jadi, $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$, yang artinya bahwa f kontinu pada c.

- Kedua, apakah teorema tersebut konversnya masih benar? Jika ya, maka teorema tersebut akan berbentuk bikondisional, yaitu $p \Leftrightarrow q$. Dengan demikian, harus dibuktikan bahwa "Misalkan $I = [a, b]$ dan $f: I \to R$. Jika f kontinu pada $c \in I$, maka f memiliki turunan pada c" atau dapat dituliskan "untuk setiap $c \in I$ dan f kontinu pada $c \in I$, maka f memiliki turunan pada c".

  Misalkan, $f(x) = |x|$, di mana $x \in R$, maka jelas bahwa f kontinu pada $x = 0$, dikarenakan $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$, diperoleh:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x}$$

  Sehingga,

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1 \text{ dan } \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1,$$

  yang berarti f tidak memiliki turunan pada 0.

Jadi, f dikatakan kontinu pada c tidak cukup untuk menunjukkan bahwa f memiliki turunan pada c.

Daftar Pustaka

Bahri, S. (2016). *Logika dan Himpunan*. Program Studi Matematika FMIPA UNRAM.

Cooney, T.J., Davis, E.J., & Henderson, K.B. (1975). *Dynamics of Teaching Secondary School Mathematics*. Boston: Houghton Mifflin Company.

Hernadi, J. (2013). *Metode Pembuktian dalam Matematika*. Jurnal Pendidikan Matematika, 2 (1), 1-13.

Kusuma, Y.S. (2013). *Logika Matematika Elementer*. 2, 206

Usodo, B. (2011). Profil Intuisi Mahasiswa dalam Memecahkan Masalah Matematika Ditinjau dari Gaya Kognitif *Field Dependent* dan *Field Independent*. Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika UNS 2011.

Yassine, B.T., Faddouli, N. E.L., Samir, B., & Idrissi, M.K. (2014). *Logika Matematika*. Procedia – Social and Behavioral Sciences, 106, 2159-2178.

Widodo, Suryo. (2007). *Pengantar Dasar Matematika*. Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Nusantara PGRI Kediri.

Profil Penulis

Irene Devi Damayanti, S.Si., M.Si.

Penulis lahir di Makale pada tanggal 02 April 1990. Ketertarikan penulis terhadap ilmu Fisika dan Matematika dimulai pada tahun 2006 silam. Hal tersebut membuat penulis memilih untuk masuk ke Sekolah Menengah Atas di SMA KATOLIK MAKALE dengan memilih Jurusan Ilmu Pengetahuan Alam (IPA) dan berhasil lulus pada tahun 2008. Penulis kemudian melanjutkan pendidikan ke Perguruan Tinggi dan berhasil menyelesaikan studi S1 di prodi FISIKA UNIVERSITAS HASANUDDIN (UNHAS) pada tahun 2013. Selama kuliah, penulis juga menggunakan waktu luang sebagai asisten dosen di LABORATORIUM FISIKA DASAR UNHAS. Setelah menyelesaikan studi S1, penulis aktif sebagai tentor di beberapa Bimbingan Belajar dan juga aktif memberikan les privat. Tiga tahun kemudian, penulis menyelesaikan studi S2 di prodi MATEMATIKA PROGRAM PASCA SARJANA UNHAS.

Penulis memiliki kepakaran pada bidang Metode Numerik. Tahun 2017 sampai saat ini, penulis aktif sebagai dosen Matematika di UNIVERSITAS KRISTEN INDONESIA TORAJA (UKI TORAJA). Selain itu, selama 3 tahun dari tahun 2019 sampai 2022 aktif mengajar sebagai guru Fisika di SMKS SPP ST PAULUS MAKALE. Dan untuk mewujudkan karir sebagai dosen profesional, penulis pun aktif sebagai peneliti di bidang kepakarannya tersebut. Selain peneliti, penulis juga aktif menulis buku dengan harapan dapat memberikan kontribusi positif bagi bangsa dan negara yang sangat kita cintai ini.

Email Penulis: irenedamayanti@ukitoraja.ac.id

15

METODE PEMBUKTIAN EKSISTENSIAL

Regina Wahyudyah Sonata Ayu
Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Palangka Raya

Pembuktian Eksistensial

Pada bagian sebelumnya, kita telah membuktikan suatu pernyataan bersyarat (kondisional atau implikasi) dengan menggunakan metode pembuktian langsung dan pembuktian tidak langsung. Pernyataan bersyarat ini pada umumnya dapat ditulis dalam bentuk $P(x) \Rightarrow Q(x)$ dan dapat diinterpretasikan sebagai pernyataan berkuantor universal $\forall x, P(x) \Rightarrow Q(x)$. Lalu bagaimana dengan pernyataan berkuantor eksistensial? Bagaimana cara pembuktiannya?

Pertama-tama, perlu diingat kembali bahwa pernyataan berkuantor eksistensial dapat ditulis dalam bentuk

$$\exists x\, P(x)$$

Pernyataan ini mengandung makna bahwa terdapat paling sedikit satu x sedemikian sehingga $P(x)$ bernilai benar. Untuk menyatakan $\exists x\, P(x)$ benar maka kita perlu menemukan atau memilih nilai x tertentu sedemikian sehingga $P(x)$ benar.

Sebagian besar teorema dan proposisi dalam matematika berupa pernyataan kondisional atau pernyataan biimplikasi (pernyataan jika-dan- hanya-jika). Akan tetapi, ada juga yang memuat bentuk $\exists x\, P(x)$. Pernyataan seperti itu disebut sebagai **pernyataan eksistensial** (Hammack, 2018). Pembuktian sebuah teorema atau proposisi yang berupa pernyataan eksistensial disebut **pembuktian eksistensial**

(Rosen, 2012). Untuk membuktikan suatu pernyataan eksistensial, maka kita perlu memilih kandidat dari semesta pembicaraan secara spesifik yang menunjukkan bahwa pernyataan tersebut benar. Pembuktian eksistensial diilustrasikan sebagai berikut

$$\exists x\, P(x)$$

$$\downarrow$$

Pilih kandidat dari semesta pembicaraan

$$\downarrow$$

Periksa apakah kandidat tersebut memenuhi $P(x)$

Berikut diberikan beberapa contoh.

Contoh 15.1 Buktikan bahwa terdapat $n \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $n^2 = n$.

Bukti. Pilih $n = 1$. Perhatikan bahwa $1^2 = 1$. □

Contoh 15.2 Buktikan bahwa terdapat bilangan kuadrat murni yang merupakan jumlahan dari dua bilangan kuadrat murni lainnya.

Bukti. Untuk membuktikan pernyataan di atas kita perlu mencari $a, b. c \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $c^2 = a^2 + b^2$. Kita tentunya tidak asing dengan formula ini karena serupa dengan menentukan triple Pythagoras. Untuk itu, kita dapat memilih $a = 3, b = 4,$ dan $c = 5.$ Maka

$$5^2 = 3^2 + 4^2.$$

Terlihat bahwa bilangan kuadrat murni 25 merupakan jumlahan dari bilangan kuadrat murni 9 dan 16. Kedua contoh di atas merupakan contoh sederhana dari pembuktian eksistensial. Pada beberapa kasus pembuktian eksistensial, kita mungkin mengalami kesulitan untuk langsung menentukan nilai x sedemikian sehingga $P(x)$ benar. Salah satu cara yang dapat kita gunakan adalah kita asumsikan $P(x)$ benar kemudian kita cari nilai x mana yang memungkinkan, berdasarkan asumsi tersebut. Langkah ini tentu bukan merupakan bagian dari pembuktian tetapi kita akan menamainya sebagai **Draf Bukti** karena kita hanya akan mengerjakannya pada kertas buram dan tidak dimasukkan ke bukti formal.

Contoh 15.3 Buktikan bahwa terdapat bilangan bulat positif x sedemikian sehingga $x^2 - x - 2 = 0.$

Draf Bukti. Kita asumsikan bahwa $x^2 - x - 2 = 0$ benar sehingga dengan menggunakan pemfaktoran kita peroleh

$$x^2 - x - 2 = 0$$
$$(x+1)(x-2) = 0$$

Berdasarkan hasil pemfaktoran kita peroleh $x = -1$ atau $x = 2.$ Dalam hal ini $x = 2$ merupakan nilai yang memenuhi dan akan digunakan sebagai kandidat dalam bukti formal.

Bukti. Pilih $x = 2$. Perhatikan bahwa

$$2^2 - 2 - 2 = 0$$

Pembuktian Pernyataan Kuantor Ganda

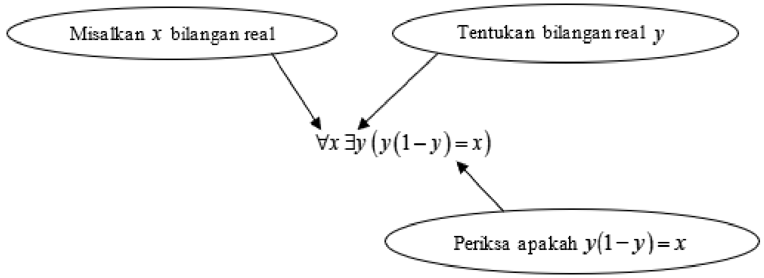
Proposisi dan teorema dalam matematika seringkali juga berupa pernyataan berkuantor ganda. Dalam hal ini proposisi dan teorema yang dimaksud memuat bentuk $\forall x\, \exists y\, P(x, y)$ atau $\exists x\, \forall y\, P(x, y)$. Urutan kuantor universal dan eksistensial dalam pernyataan yang akan dibuktikan akan mempengaruhi langkah pembuktiannya.

Contoh 15.4 Buktikan bahwa untuk setiap bilangan real $x,$ jika $x < 0$ maka terdapat bilangan real y sedemikian sehingga $y(1-y) = x.$

Draf Bukti. Pernyataan yang akan dibuktikan berbentuk

$$\forall x\, \exists y\, \left(y(1-y) = x\right)$$

dimana semesta pembicaraannya adalah himpunan bilangan real. Langkah pembuktian dapat diilustrasikan sebagai berikut



Ambil sembarang x bilangan real dan misalkan $x<0$. Kita perlu menentukan nilai y sedemikian sehingga $y(1-y)=x$ benar. Nilai y dapat diperoleh dengan menyelesaikan persamaan kuadrat

$$y(1-y)-x=0 \text{ atau } y^2-y+x=0$$

menggunakan rumus kuadratik sehingga diperoleh

$$y=\frac{1\pm\sqrt{1-4x}}{2}.$$

Perhatikan bahwa $\sqrt{1-4x}$ terdefinisi karena $x<0$. Sekarang kita mempunyai dua kandidat nilai y. Akan tetapi, karena tujuan kita adalah untuk membuktikan $\exists y\left(y(1-y)=x\right)$ maka kita cukup memilih satu nilai y untuk menunjukkan $y(1-y)=x$ benar. Dalam hal ini kita akan menggunakan $y=\dfrac{1+\sqrt{1-4x}}{2}$ dalam bukti formal.

Bukti. Ambil sembarang x bilangan real dan misalkan $x<0$. Pilih $y=\dfrac{1+\sqrt{1-4x}}{2}$ yang terdefinisi karena $x<0$. Maka

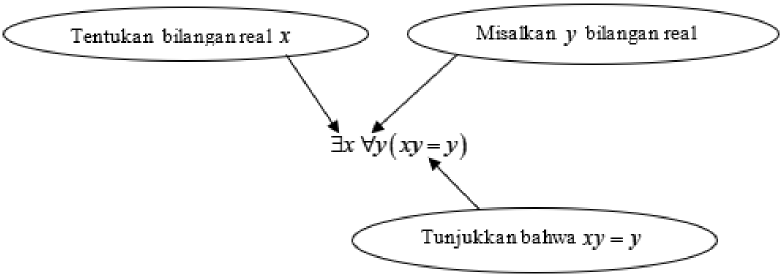
$$y(1-y)=\left(\frac{1+\sqrt{1-4x}}{2}\right)\left(1-\frac{1+\sqrt{1-4x}}{2}\right)=\frac{4x}{4}=x$$

Contoh 15.5 Buktikan bahwa terdapat bilangan real x sedemikian sehingga untuk setiap bilangan real y, $xy=y$.

Draf Bukti. Pernyataan yang akan dibuktikan berbentuk

$$\exists x\,\forall y\left(xy=y\right)$$

dengan semesta pembicaraannya adalah bilangan real. Hal pertama yang dilakukan adalah menentukan kandidat x kemudian kita harus menunjukkan bahwa $xy=y$ berlaku untuk setiap bilangan real y. Langkah pembuktian dapat diilustrasikan sebagai berikut



Jelas bahwa kandidat yang memenuhi adalah $x = 1$ karena $1y = y$ untuk setiap y bilangan real.

Bukti. Pilih $x = 1$. Ambil sembarang y bilangan real maka

$$1y = y\,.$$ □

Pembuktian Konstruktif dan Non Konstruktif

Pembuktian eksistensial dibagi menjadi dua kategori yakni pembuktian konstruktif dan pembuktian non konstruktif. Pembuktian konstruktif adalah pembuktian pernyataan eksistensial dengan menyajikan contoh secara ekplisit sedangkan pembuktian non konstruktif adalah pembuktian pembuktian pernyataan eksistensial dengan tanpa memberikan contoh secara ekplisit. Saat kita hendak membuktikan suatu pernyataan dengan menggunakan pembuktian non konstruktif, kita dapat menggunakan metode pembuktian yang sudah dipelajari sebelumnya yakni dengan menggunakan pembuktian tidak langsung menggunakan kontradiksi. Contoh 15.1 – 15.5 merupakan contoh pembuktian konstruktif. Untuk lebih memahami perbedaan kedua jenis pembuktian ini, kita akan membuktikan dua proposisi dengan menggunakan kedua pembuktian tersebut.

Contoh 15.6 Buktikan bahwa terdapat bilangan irasional x dan y sedemikian sehingga x^y rasional.

Bukti. Misalkan $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ dan $y = \sqrt{2}$. Jelas bahwa y irasional tetapi kita belum mengetahui dengan pasti apakah x rasional atau irasional. Misalkan x irasional maka kita mempunyai bilangan irasional yang dipangkatkan bilangan irasional dan menghasilkan bilangan rasional yakni

$$x^y = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{2} = 2.$$

Di lain pihak, misalkan x rasional. Tinjau

$$y^y = \sqrt{2}^{\sqrt{2}} = x \text{ rasional}$$

maka kita juga memperoleh bilangan irasional yang dipangkatkan bilangan irasional dan menghasilkan bilangan rasional.

Contoh di atas merupakan contoh pembuktian non konstruktif. Pembuktian tersebut telah menunjukkan bahwa terdapat bilangan irasional x dan y sedemikian sehingga x^y rasional dengan tanpa memberikan contoh secara eksplisit. Pada langkah pembuktian memang telah ditunjukkan bahwa $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$ atau $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ merupakan irasional yang dipangkatkan bilangan irasional dan menghasilkan bilangan rasional namun tidak ditunjukkan dengan pasti mana diantara keduanya yang merupakan kandidat yang benar.

Proposisi yang sama ini selanjutnya akan dibuktikan dengan menggunakan pembuktian konstruktif.

Contoh 15.7 Buktikan bahwa terdapat bilangan irasional x dan y sedemikian sehingga x^y rasional.

Bukti. Pilih $x = \sqrt{2}$ dan $y = \log_2 9$. Maka

$$x^y = \left(\sqrt{2}\right)^{\log_2 9} = \left(\sqrt{2}\right)^{\log_2 3^2} = \left(\sqrt{2}\right)^{2\cdot\log_2 3} = \left(\sqrt{2}^{2}\right)^{\log_2 3} = (2)^{\log_2 3} = 3.$$

Karena 3 adalah bilangan rasional maka kita telah menunjukkan bahwa x^y rasional. □

Selanjutnya, akan diberikan proposisi yang berupa pernyataan kuantor ganda dan akan dibuktikan dengan menggunakan pembuktian konstruktif dan pembuktian non konstruktif.

Contoh 15.8 Buktikan bahwa untuk setiap bilangan rasional x terdapat bilangan asli n sedemikian sehingga $x \le n$.

Bukti. Proposisi yang akan dibuktikan dapat ditulis dalam bentuk

$$\forall x \in \mathbb{Q}\ \exists n \in \mathbb{N}, x \leq n$$

Menggunakan kontradiksi, misalkan terdapat suatu nilai $x \in \mathbb{Q}$ sedemikian sehingga $x > n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Karena $1 \in \mathbb{N}$ maka kita peroleh $x > 1$. Selanjutnya, karena $x \in \mathbb{Q}$ maka x dapat dinyatakan sebagai $x = \frac{a}{b}$ untuk suatu $a, b \in \mathbb{N}$. Selain itu, karena $x > 1$, kita peroleh $\frac{a}{b} > 1$ atau $a > b$. Karena $a \in \mathbb{N}$ maka $\frac{a}{b} > a$ sehingga diperoleh $\frac{1}{b} > 1$. Akibatnya, kita peroleh $1 > b$. Pernyataan terakhir ini kontradiksi karena $b \in \mathbb{N}$.

■

Pembuktian pada contoh 15.8 di atas tergolong pembuktian non konstruktif karena proposisi dibuktikan dengan kontradiksi tanpa menyebutkan secara eksplisit bilangan asli n seperti apa yang memenuhi $x \leq n$.

Contoh 15.9 Buktikan bahwa untuk setiap bilangan rasional x terdapat bilangan asli n sedemikian sehingga $x \leq n$.

Draft Bukti. Ambil sembarang $x \in \mathbb{Q}$ maka terdapat $a, b \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $x = \frac{a}{b}$. Kita perlu menentukan nilai $n \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $x \leq n$. Sekarang karena $a \in \mathbb{N}$ maka

$$\frac{a}{b} \leq a\ .$$

Untuk itu, kita dapat memilih kandidat $n = a \in \mathbb{N}$ ke dalam bukti formal.

Bukti. Ambil sembarang $x \in \mathbb{Q}$ maka terdapat $a, b \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $x = \frac{a}{b}$. Selanjutnya, pilih $n = a$ sehingga diperoleh

$$x = \frac{a}{b} \leq a = n.$$ ■

Pembuktian Eksistensi dan Ketunggalan

Seperti telah dijelaskan pada bagian sebelumnya bahwa untuk membuktikan pernyataan eksistensial $\exists x\, P(x)$ maka kita perlu menunjukkan terdapat paling sedikit satu x sedemikian sehingga $P(x)$ benar. Akan tetapi, terkadang proposisi atau teorema dalam matematika menyatakan bahwa terdapat **tepat satu** (unik) kandidat x yang memenuhi $P(x)$ atau jika dituliskan ke dalam simbol menjadi $\exists! x\, P(x)$. Tanda seru "!" dalam pernyataan $\exists! x\, P(x)$ melambangkan ketunggalan. Untuk membuktikan pernyataan seperti ini, kita perlu menunjukkan bahwa kandidat untuk $P(x)$ ada dan tidak ada kandidat lain yang memenuhi $P(x)$. Terdapat dua langkah dalam membuktikan ketunggalan yakni

- Eksistensi: kita akan menunjukkan bahwa terdapat elemen x yang memenuhi $P(x)$.
- Ketunggalan: kita akan menunjukkan bahwa jika x dan y memenuhi $P(x)$ maka haruslah $x = y$.

Contoh 15.10 Salah satu contoh pembuktian yang terkenal adalah pembuktian teorema Algoritma Pembagian.

Teorema Algoritma Pembagian (Burton, 2017). Diberikan bilangan bulat a dan b dengan $b > 0$, maka terdapat bilangan bulat unik q dan r sedemikian sehingga

$$a = qb + r \quad 0 \le r < b.$$

Bukti. Misalkan $a, b \in \mathbb{Z}$ dengan $b > 0$ dan $S = \{a - xb | x \in \mathbb{Z}; a - xb \ge 0\}$. Pertama-tama akan ditunjukkan bahwa S tak kosong. Pilih $x = -|a| \in \mathbb{Z}$. Karena $b \ge 1$, kita peroleh $|a| b \ge |a|$ sehingga

$$a - xb = a - (-|a| b) = a + |a| b \ge a + |a| \ge 0.$$

Terlihat bahwa $a - xb$ ada di S. Karena S bukan merupakan himpunan kosong maka berdasarkan *Well-Ordering Principle* (WOP), maka S mempunyai elemen terkecil, katakanlah r. Berdasarkan definisi S, maka terdapat bilangan bulat q yang memenuhi

$$r = a - qb, \ 0 \le r.$$

Selanjutnya, akan ditunjukkan $r < b.$ Andaikan tidak demikian artinya $r \ge b$ atau

$$r - b = a - qb - b = a - (q+1)b \ge 0.$$

Bentuk $a - (q+1)b$ jelas menunjukkan elemen di $S,$ tetapi karena $b > 0$ maka

$$a - (q+1)b = r - b < r.$$

Akibatnya, r bukan elemen terkecil di S yang bertentangan dengan pemisalan r sebagai elemen terkecil di $S.$ Sehingga pengandaian itu salah dan haruslah $r < b.$

Kita sudah membuktikan eksistensi q dan r dan langkah selanjutnya adalah untuk membuktikan ketunggalan q dan r. Andaikan q dan r tidak tunggal, katakanlah memiliki representasi yang berbeda yakni

$$a = qb + r = g'b + r'$$

Dimana $0 \le r < b$ dan $0 \le r' < b$. Dengan demikian

$$r' - r = b(q - q') \text{ atau}$$

$$|r' - r| = |b||q - q'|.$$

Dengan menjumlahkan kedua pertidaksamaan $-b < -r \le 0$ dan $0 \le r' < b$ diperoleh $-b < r' - r < b$, atau ekivalen dengan $|r' - r| < b$. Akibatnya diperoleh

$$b|q - q'| < b \text{ atau}$$

$$0 \le |q - q'| < 1.$$

Karena $|q - q'|$ merupakan bilangan bulat taknegatif, maka haruslah $|q - q'| = 0$. Akibatnya diperoleh $q = q'$ sehingga berimplikasi $r = r'$ (kontradiksi). ■

Contoh 15.11 Buktikan bahwa jika a dan b bilangan real dan $a \neq 0$, maka terdapat bilangan real x tunggal sedemikian sehingga $ax+b=0$.

Bukti. Pertama-tama akan ditunjukkan eksistensi $x \in \mathbb{R}$ yang memenuhi $ax+b=0$. Pilih $x = -\frac{b}{a} \in \mathbb{R}$. Dalam hal ini x terdefinisi karena $a \neq 0$. Tinjau

$$ax+b=a\left(-\frac{b}{a}\right)+b=-b+b=0.$$

Dengan demikian terbukti bahwa terdapat $x \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $ax+b=0$. Langkah selanjutnya adalah membuktikan ketunggalan x. Misalkan $y \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $ay+b=0$. Maka kita peroleh

$$ax+b=ay+b\,.$$

Dari prsamaan terakhir kita peroleh $ax=ay$. Dengan membagi kedua ruas dengan a dimana $a \neq 0$ diperoleh $x=y$. Jadi, ketunggalan $x \in \mathbb{R}$ juga terbukti. ■

Latihan

Buktikan pernyatan-pernyataan eksistensial berikut baik menggunakan pembuktian konstruktif atau pembuktian non konstruktif, atau keduanya.

1. Terdapat bilangan bulat positif x sedemikian sehingga $x^2+2x-3=0$.
2. Untuk setiap bilangan real x, terdapat bilangan real y sedemikian sehingga $x-y=5$.
3. Terdapat bilangan real x sedemikian sehingga untuk setiap bilangan real y, $y-x=y$.
4. Terdapat bilangan rasional x dan bilangan irasional y sedemikian sehingga x^y irasional.
5. Terdapat bilangan asli x tunggal sedemikian sehingga $|x+1|=4$.

Daftar Pustaka

Burton, D. M. (2017). *Elementary Number Theory* (7th ed.). McGraw-Hill.

Hammack, R. (2018). *Book of Proof* (3rd ed.). Richard Hammack.

Rosen, K. H. (2012). *Discrete Mathematics and Its Applications* (7th ed.). McGraw-Hill.

Profil Penulis

Regina Wahyudyah Sonata Ayu

Penulis saat ini berprofesi sebagai dosen di Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Palangka Raya. Penulis memiliki ketertarikan terhadap Matematika sejak di bangku sekolah. Hal ini juga yang memotivasi Penulis untuk melanjutkan studi pendidikan tinggi dengan mengambil jurusan Matematika. Penulis telah menempuh pendidikan sarjana pada Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta (2011-2015). Setelah itu, Penulis melanjutkan studi ke jenjang magister pada Program Studi Matematika ITB (2017-2019). Setelah lulus, Penulis sempat bekerja sebagai dosen di Program Studi Matematika FMIPA Universitas San Pedro, Kupang, NTT hingga awal tahun 2022.

Selain aktif dalam kegiatan pengajaran, Penulis juga mencoba aktif dalam kegiatan penelitian dan kegiatan pengabdian kepada masyarakat. Bidang penelitian yang menjadi minat Penulis antara lain model penyebaran penyakit (epidemiologi), serta penerapan kontrol optimal dan kontrol adaptif pada model penyebaran penyakit. Sejauh ini, kegiatan pengabdian masyarakat yang Penulis laksanakan adalah berupa pelatihan pemanfaatan *software* statistika untuk pengolahan data seperti SPSS dan SmartPLS.

Email Penulis: reginawsayu@mipa.upr.ac.id

Indonesia menulis

Editor:
Suci Haryanti

Untuk akses **Buku Digital,**
Scan **QR CODE**

Media Sains Indonesia

Media Sains Indonesia
Melong Asih Regency B.40, Cijerah
Kota Bandung - Jawa Barat
Email : penerbit@medsan.co.id
Website : www.medsan.co.id

IKAPI
IKATAN PENERBIT INDONESIA

GET IT ON Google Play

ISBN 978-623-195-371-1 (PDF)
9 786231 953711