REPUBLIK INDONESIA
KEMENTERIAN HUKUM DAN HAK ASASI MANUSIA

SURAT PENCATATAN CIPTAAN

Dalam rangka pelindungan ciptaan di bidang ilmu pengetahuan, seni dan sastra berdasarkan Undang-Undang Nomor 28 Tahun 2014 tentang Hak Cipta, dengan ini menerangkan:

Nomor dan tanggal permohonan	:	EC002023132484, 14 Desember 2023
Pencipta		
Nama	:	**Nanang, Novrianti dkk**
Alamat	:	Perum Bumi Malayu Asri C.9 RT 02 RW 10 Jl. Raya Samarang Kec. Tarogong Kaler Kab. Garut, Tarogong Kaler, Garut, Jawa Barat, 44151
Kewarganegaraan	:	Indonesia
Pemegang Hak Cipta		
Nama	:	**Nanang, Novrianti dkk**
Alamat	:	Perum Bumi Malayu Asri C.9 RT 02 RW 10 Jl. Raya Samarang Kec. Tarogong Kaler Kab. Garut, Tarogong Kaler, Garut, Jawa Barat, 44151
Kewarganegaraan	:	Indonesia
Jenis Ciptaan	:	**Buku**
Judul Ciptaan	:	**KALKULUS**
Tanggal dan tempat diumumkan untuk pertama kali di wilayah Indonesia atau di luar wilayah Indonesia	:	24 November 2023, di Padang
Jangka waktu pelindungan	:	Berlaku selama hidup Pencipta dan terus berlangsung selama 70 (tujuh puluh) tahun setelah Pencipta meninggal dunia, terhitung mulai tanggal 1 Januari tahun berikutnya.
Nomor pencatatan	:	000565438

adalah benar berdasarkan keterangan yang diberikan oleh Pemohon.
Surat Pencatatan Hak Cipta atau produk Hak terkait ini sesuai dengan Pasal 72 Undang-Undang Nomor 28 Tahun 2014 tentang Hak Cipta.

a.n. MENTERI HUKUM DAN HAK ASASI MANUSIA
Direktur Hak Cipta dan Desain Industri

Anggoro Dasananto
NIP. 196412081991031002

LAMPIRAN PENCIPTA

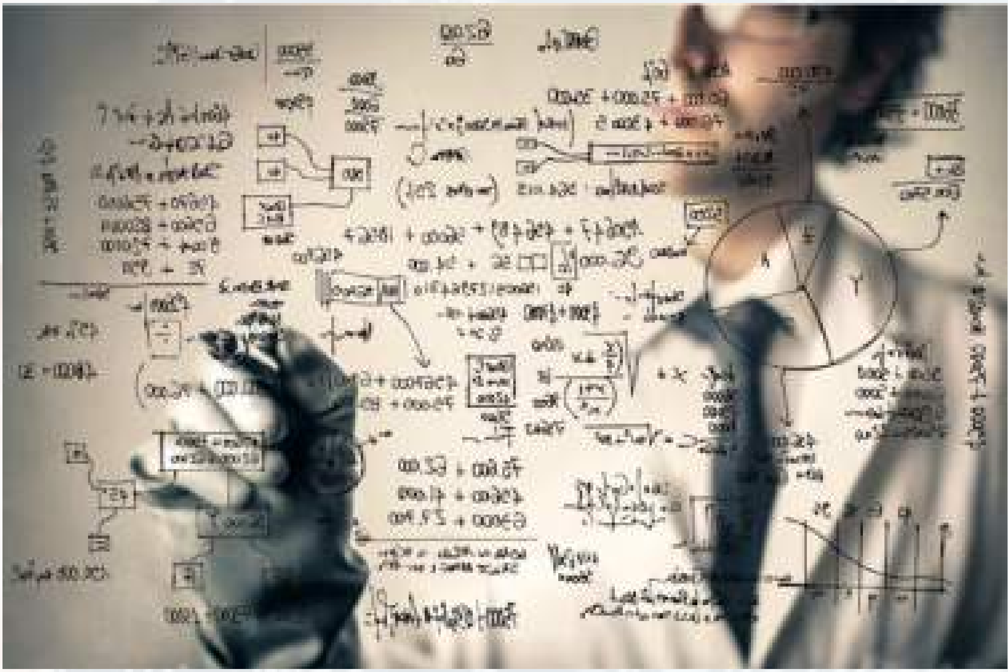
No	Nama	Alamat
1	Nanang	Perum Bumi Malayu Asri C.9 RT 02 RW 10 Jl. Raya Samarang Kec. Tarogong Kaler Kab. Garut, Tarogong Kaler, Garut
2	Novrianti	Jl. Raden Wijaya RT. 27 No.35 Kebon Kopi Kelurahan The Hok , Jambi Selatan, Jambi
3	Rifka Agustianti	Jl. Cihanjuang Gg. Bp. Madrapi No. 97 RT 03/03 Kel. Cibabat Kec. Cimahi Utara, Cimahi Utara, Cimahi
4	Khairunnisa Fadhilla Ramdhania	Jl. Perjuangan RT 02/07 No. 36, Kel. Harapan Baru, Kec. Bekasi Utara, Kota Bekasi, 17123, Bekasi Utara, Bekasi
5	Enos Lolang	Jl. Nusantara No. 12 Makale, Kab. Tana Toraja, Makale, Tana Toraja
6	Cynthia Tri Octavianti	Perum Bukit Hijau, Jl. Bukit Hijau Blok E-104, RT 02 RW 09, Tlogomas, Lowokwaru, Malang, Lowokwaru, Malang
7	Hanna Hilyati Aulia	Dusun II 006/002 Desa Braja Harjosari , Braja Slebah, Lampung Timur
8	Netty J. Marlin Gella	Jalan El Tari No. 17A, RT001/RW003, Kelurahan Kampung Baru , Kota Soe, Timor Tengah Selatan
9	Asri Nurhafsari	Perumahan Graha Batavia Blok GBA 7 No.2 RT 07 RW 14 Kelurahan SIndangsari Kec.Pasarkemis Kab.Tangerang, Pasar Kemis, Tangerang
10	Ulfah Sa'adah	Gang Yao II No. 26 Perumnas I Waena, Heram, Jayapura
11	Yunita Oktavia Wulandari	Jalan Comal No.1B Malang, Blimbing, Malang

LAMPIRAN PEMEGANG

No	Nama	Alamat
1	Nanang	Perum Bumi Malayu Asri C.9 RT 02 RW 10 Jl. Raya Samarang Kec. Tarogong Kaler Kab. Garut, Tarogong Kaler, Garut
2	Novrianti	Jl. Raden Wijaya RT. 27 No.35 Kebon Kopi Kelurahan The Hok , Jambi Selatan, Jambi
3	Rifka Agustianti	Jl. Cihanjuang Gg. Bp. Madrapi No. 97 RT 03/03 Kel. Cibabat Kec. Cimahi Utara, Cimahi Utara, Cimahi
4	Khairunnisa Fadhilla Ramdhania	Jl. Perjuangan RT 02/07 No. 36, Kel. Harapan Baru, Kec. Bekasi Utara, Kota Bekasi, 17123, Bekasi Utara, Bekasi
5	Enos Lolang	Jl. Nusantara No. 12 Makale, Kab. Tana Toraja, Makale, Tana Toraja

6	Cynthia Tri Octavianti	Perum Bukit Hijau, Jl. Bukit Hijau Blok E-104, RT 02 RW 09, Tlogomas, Lowokwaru, Malang, Lowokwaru, Malang
7	Hanna Hilyati Aulia	Dusun II 006/002 Desa Braja Harjosari , Braja Slebah, Lampung Timur
8	Netty J. Marlin Gella	Jalan El Tari No. 17A, RT001/RW003, Kelurahan Kampung Baru , Kota Soe, Timor Tengah Selatan
9	Asri Nurhafsari	Perumahan Graha Batavia Blok GBA 7 No.2 RT 07 RW 14 Kelurahan SIndangsari Kec.Pasarkemis Kab.Tangerang, Pasar Kemis, Tangerang
10	Ulfah Sa'adah	Gang Yao II No. 26 Perumnas I Waena, Heram, Jayapura
11	Yunita Oktavia Wulandari	Jalan Comal No.1B Malang, Blimbing, Malang

KALKULUS



PENULIS:

Dr. H. Nanang, M.Pd.
Novrianti, S.Si., M.Si., Ph.D.
Rifka Agustianti, M. Pd
Khairunnisa Fadhilla Ramdhania, S.Si., M.Si.
Enos Lolang, S.Si., M.Pd.
Cynthia Tri Octavianti, S.Si., M.Sc.
Hanna Hilyati Aulia, M.Si.
Netty Julinda Marlin Gella, M.Si.
Asri Nurhafsari, S.Pd., M.Pd.
Ulfah Sa'adah, M.Pd.
Yunita Oktavia Wulandari, S.Si., M.Pd.

KALKULUS

Penulis:

Dr. H. Nanang, M.Pd.
Novrianti, S.Si., M.Si., Ph.D.
Rifka Agustianti, M. Pd
Khairunnisa Fadhilla Ramdhania, S.Si., M.Si.
Enos Lolang, S.Si., M.Pd.
Cynthia Tri Octavianti, S.Si., M.Sc.
Hanna Hilyati Aulia, M.Si.
Netty Julinda Marlin Gella, M.Si.
Asri Nurhafsari, S.Pd., M.Pd.
Ulfah Sa'adah, M.Pd.
Yunita Oktavia Wulandari, S.Si., M.Pd.

GET PRESS INDONESIA

KALKULUS

Penulis :

Dr. H. Nanang, M.Pd.
Novrianti, S.Si., M.Si., Ph.D.
Rifka Agustianti, M. Pd
Khairunnisa Fadhilla Ramdhania, S.Si., M.Si.
Enos Lolang, S.Si., M.Pd.
Cynthia Tri Octavianti, S.Si., M.Sc.
Hanna Hilyati Aulia, M.Si.
Netty Julinda Marlin Gella, M.Si.
Asri Nurhafsari, S.Pd., M.Pd.
Ulfah Sa'adah, M.Pd.
Yunita Oktavia Wulandari, S.Si., M.Pd.

ISBN : 978-623-198-878-2
Editor : Nanny Mayasari, S.Pd., M.Pd., CQMS.
Penyunting: Yuliatri M.Hum.
Desain Sampul dan Tata Letak : Atyka Trianisa, S.Pd.

Penerbit : Get Press Indonesia
Anggota IKAPI No. 033/SBA/2022

Redaksi :
Jl. Palarik Air Pacah RT 001 RW 006
Kelurahan Air Pacah Kecamatan Koto Tangah
Padang Sumatera Barat
Website : www.getpress.co.id
Email : globaleksekutifteknologi@gmail.com

Cetakan Pertama, November 2023

KATA PENGANTAR

Puji Syukur kami panjatkan atas kehadirat Allah SWT, dan berkat limpahan rahmat dan hidayah-Nya buku "**KALKULUS**" ini dapat disusun dan diselesaikan dengan baik. Buku ini untuk membimbing dalam penemuan konsep-konsep matematika tentang perhitungan dan analisis yang menjadi inti dari kalkulus.

Buku ini berbeda dengan buku kalkulus pada umumnya, dibahas secara komprehensif dan dilengkapi dengan contoh soal. Buku yang terdiri dari 12 bab, diantaranya: 1) Sistem Bilangan Real; 2) Fungsi; 3) Nilai Mutlak; 4) Fungsi Aljabar; 5) Fungsi Transenden; 6) Intuisi Limit; 7) Limit Sepihak; 8) Kekontinuan; 9) Intuisi Turunan; 10) Turunan I; 11) Turunan II; 12) Penggunaan Turunan.

Buku ini ditujukan untuk mahasiswa, para akademisi, dan praktisi yang ingin memperdalam Kalkulus. Semoga buku ini memberikan banyak manfaat untuk mahasiswa, akademisi, praktisi, dan menjadi ladang pahala jariah para penulisnya.

Padang, November 2023

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

BAB 1

SISTEM BILANGAN REAL

Oleh Dr. Nanang, M.Pd.

1.1. Pendahuluan

Sebelum abad ke-17, aljabar dan geometri dipelajari secara terpisah. Orang-orang Yunani telah menyempurnakan geometri elementer kira-kira 2000 tahun yang lalu. Sedangkan aljabar dikembangkan orang-orang Hindu dan Arab dalam abad-abad kemudian. Aljabar mereka, membahas sifat-sifat bilangan, sedangkan geometri Euclids mempelajari sifat-sifat titik, garis, bidang, dan sebagainya. Sampai abad ke-17 nampaknya terdapat sedikit sekali hubungan antara aljabar dan geometri. Pada abad ke-17, dua matematikawan Perancis, yaitu Rene Descartes (1596-1650) yang juga seorang filsuf dan Pierre de Fermat (1601-1655) menemukan disiplin baru yang sekarang dinamakan *geometri analitis.* Di dalam geometri ini digunakan operasi-operasi aljabar dan persamaan-persamaan untuk memecahkan persoalan-persoalan geometri. Cara yang digunakan itu diantaranya menganggap persamaan sebagai kurva (lengkungan) geometri.

Dasar geometri analitis adalah sistem koordinat yang telah dikembangkan oleh Descartes (Cartesius). Dia mengkaitkan bilangan-bilangan dalam aljabar dengan titik-titik dalam geometri. Dengan menggunakan koordinat-koordinat Cartesian, banyak hal dalam albar dan geometri dapat dilihat sebagai dua penjelmaan dari satu aspek; hal ini dapat dibandingkan dengan sesuatu barang yang dalam dua bahasa namanya berlainan.

Nama-nama yang dihubungkan dengan penemuan *kalkulus* pada umumnya adalah Isaac Newton (1642-1727) dan Gottfried Leibniz (1646-1716). Newton, seorang Inggris, mengembangkan kalkulus sebagai alat yang diperlukannya dalam penyelidikan-penyelidikan yang ia lakukan di dalam fisika dan astronomi, sedangkan Leibniz, seorang Jerman, juga mengembangkan kalkulus, lepas dari Newton tetapi hampir bersamaan (Purcell dalam Rawuh dan Bana Kartasasmita, 1985).

1.2. Angka dan Bilangan

Advernesia (2020) menjelaskan tentang pengertian angka dan bilangan sebagai berikut:

1.2.1. Pengertian Angka

Angka adalah bentuk digit yang digunakan untuk melambangkan suatu nilai bilangan. Angka dalam bahasa inggris disebut dengan "*numeral*". Digit adalah suatu bentuk yang dapat digunakan untuk membuat angka. Digit berbentuk satu bentuk khusus penulisan huruf (*tipografi*). Angka yang digunakan sekarang yaitu angka Hindu-Arab dan angka Romawi.

Angka Hindu-Arab merupakan angka yang digunakan sekarang dengan menggunakan 10 bentuk digit, yaitu: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, dan 9. Angka romawi merupakan angka yang populer di peradaban kuno dengan 7 bentuk digit, yaitu: I, V, X, L, C, D, dan M.

Setiap angka merupakan bentuk atau beberapa bentuk digit yang merepresentasikan suatu nilai bilangan. Jadi, lambang atau bentuk yang digunakan untuk mewakili suatu bilangan disebut dengan angka atau lambang bilangan.

Contoh: Angka: III dan 3 (tiga), 15 (satu lima)

1.2.2. Pengertian Bilangan (*Number*)

Bilangan adalah suatu objek matematika yang sifatnya abstrak dan termasuk ke dalam unsur yang tidak terdefinisikan (*underfined term*) yang berkenaan dengan nilai. Bilangan adalah ekspresi matematika yang telah didefinisikan dan digunakan untuk melakukan perhitungan. Bilangan dalam bahasa inggris disebut dengan "*number*" artinya jumlah yang disebutkan. "Bilangan" memberi "Nilai" jumlah terhadap sesuatu yang di hitung lalu "Angka" digunakan untuk memberikan "Bentuk" terhadap nilai tersebut berupa satu atau beberapa "Digit".

Contoh: 15 (lima belas adalah bilangannya, satu & lima adalah digitnya, sedangkan satu lima adalah angkanya).

Perhitungan dalam ilmu matematika menggunakan beberapa sistem bilangan, yang umumnya digunakan yaitu sistem bilangan bulat dan sistem bilangan real. Bilangan merupakan kumpulan angka yang menempati urutan dari kanan sebagai nilai satuan, puluhan, ratusan, ribuan dan seterusnya. Pengertian lain, bilangan merupakan konsep matematika yang dipakai untuk pencacahan dan pengukuran. Konsep bilangan yang sudah bertahun-tahun lamanya sudah diperluas meliputi bilangan nol, bilangan negatif, bilangan rasional, bilangan irasional, dan bilangan kompleks.

1.3. Sistem Bilangan Real

Sistem bilangan adalah suatu sistem yang berisi sekumpulan bilangan yang telah didefinisikan karakteristiknya. Istilah sistem bilangan dalam bahasa inggris yaitu "*number system*". Berdasarkan teori bilangan dan himpunan, yang secara garis besar terdapat 5 jenis sistem bilangan dalam ilmu matematika. Sebagaimana pada gambar di bawah dapat diketahui bilangan kompleks ($\mathbb{C}$) memuat 4 sistem bilangan lain pada gambar yaitu bilangan real (ℝ), bilangan rasional (ℚ), bilangan bulat (ℤ), dan bilangan asli (ℕ).

Gambar 1.1 Sistem Bilangan Real

(Sumber: Penulis, 2023)

1. Bilangan Asli (ℕ). Berdasarkan kesepakatan matematikawan tradisional, bilangan asli adalah himpunan bagian dari sistem bilangan bulat yang merupakan bilangan bulat positif yang dimulai dari angka 1, yaitu {1, 2, 3, 4, ...}. Ahli matematika menggunakan bentuk ℕ untuk bilangan asli. Berdasarkan kesepakatan ilmuwan ilmu komputer modern bilangan asli adalah himpunan bagian dari sistem bilangan bulat yang terdiri dari angka 0 dan bilangan bulat positif yaitu: ℕ = {0, 1, 2, 3, 4, ...}. Di dalam bilangan asli juga ditemukan bilangan prima (ℙ) dan bilangan komposit (K). Bilangan prima adalah bilangan yang tidak dapat dibagi oleh bilangan lainnya atau disebut dengan bilangan asli kecuali bilangan itu sendiri dan 1. Bilangan komposit ialah bilangan asli yang lebih besar dari satu namun tidak termasuk dalam bilangan prima.
   Contoh: ℙ = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ...}

K = {4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 16, ...}

2. Bilangan Bulat (ℤ). Bilangan bulat adalah sistem bilangan yang merupakan himpunan dari semua bilangan (bukan pecahan) yang terdiri dari bilangan bulat negatif {…, -3, -2, -1}, nol {0}, dan bilangan bulat positif {1, 2, 3,…}. Ahli matematika menggunakan bentuk ℤ untuk bilangan bulat. Bilangan bulat: ℤ = {..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...}. Dapat diketahui bilangan asli (ℕ) merupakan bagian dari bilangan bulat (ℤ).

3. **Bilangan cacah** (H) yakni adalah suatu himpunan bilangan bulat yang tidak memiliki nilai negatif dan dimulai dari angka (nol)
   Contoh: H= {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ...}

4. Bilangan Pecahan (E) adalah bilangan yang memiliki penyebut dan pembilang. Misalnya saja 1/2, angka 1 = penyebut dan angka 2 = pembilang.
   Contoh: E = { ⅓, ⅔, ⅛, ….. }

5. **Bilangan Rasional (ℚ).** Bilangan rasional adalah sistem bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk pecahan $^a/_b$ dengan a dan b adalah bilangan bulat dan b ≠ 0. Ahli matematika menggunakan bentuk ℚ untuk bilangan rasional.
   Contoh: $1 = \frac{2}{2}$; $0{,}5 = \frac{1}{2}$; $-0{,}1 = -\frac{1}{10}$; $\frac{1}{3} = 0{,}333...$Dapat diketahui bilangan bulat (ℤ) merupakan bagian dari bilangan rasional (ℚ).

6. **Bilangan Irrasional (I)** merupakan suatu himpunan bilangan real yang tidak dapat di bagi, bilangan irrasional juga tidak dapat dinyatakan dalam bentuk pecahan.
   Contoh : I = { $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, ….. }
   Keterangan $\sqrt{9} = 3$ berarti $\sqrt{9}$ bukan bilangan irrasional.

7. **Bilangan positif** (**P**) merupakan bilangan yang bernilai positif selain nol.
   Contoh: P = {2, 3, 4, 5, ¼, ….}

8. **Bilangan negatif (F)** ialah bilangan yang bernilai negatif.
   Contoh: F = { -5, ¼, ….}
   Keterangan -1/-4 = ¼, jadi -1/-4 bukan bilangan negatif.

9. Bilangan Ganjil ($\mathbb{J}$) ialah suatu bilangan yang jika dibagi 2(Dua) maka akan tersisa 1 atau bilangan yang dapat dinyatakan dengan 2n-1 dengan n adalah bilangan bulat.
   Contoh: $\mathbb{J}$ = {-3, -1, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15,…. }

10. **Bilangan Genap (G)** merupakan suatu bilangan yang akan habis jika dibagi menjadi 2(dua).
    Contoh: G = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18,…}

11. Bilangan Kuadrat ($\mathbb{D}$) Bilangan kuadrat merupakan bilangan yang dihasilkan dari perkalian suatu bilangan dengan bilangan itu sendiri sebanyak dua kali dan dibentukkan dengan pangkat 2.
    Contoh: $\mathbb{D} = \{0^2, 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, \ldots\} = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}$

12. **Bilangan Real (ℝ).** Bilangan real atau riil adalah sistem bilangan yang dapat ditulis dalam bentuk desimal. Bilangan real terdiri dari bilangan rasional dan irasional. **Bilangan Rasional** seperti penjelasan di atas, bilangan rasional adalah sistem bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk pecahan $^a/_b$ dengan a, b = bilangan bulat dan b ≠ 0. **Bilangan Irasional** adalah sistem bilangan yang tidak dapat dinyatakan dalam bentuk pecahan $^a/_b$ namun dapat ditulis dalam bentuk desimal.
    Contoh: π (phi) = 3,14159265358...; e (euler) = 2,7182818...
    ℝ = { 0, 1, ¼, ⅔, √2, √5, …}

13. Bilangan Kompleks ($\mathbb{C}$). Bilangan kompleks adalah sistem bilangan dalam ilmu matematika dengan notasi a + bi, dengan a, b merupakan bilangan real dan i merupakan bilangan imajiner. Secara umum semua bilangan dalam ilmu matematika merupakan bagian dari bilangan kompleks. Bilangan imajiner adalah suatu bilangan yang dapat didefinisikan nilainya sebagai $i^2 = -1$. Pemahaman mengenai bilangan kompleks secara umum dapat ditekuni saat menempuh jenjang ilmu matematika murni di perguruan tinggi.
    Contoh: $\mathbb{C}$ = {2-3i, 8+2, …..}

1.4. Selang Interval

Dalam Wikipedia, selang (bilangan real) dalam matematika adalah suatu himpunan bilangan real dengan sifat bahwa setiap bilangan yang terletak di antara dua bilangan dalam himpunan itu juga termasuk ke dalam himpunan. Misalnya, himpunan semua bilangan x memenuhi $0 \leq x \leq 1$ adalah suatu selang yang memuat 0 dan 1, maupun semua bilangan di antara keduanya. Contoh lain selang adalah suatu himpunan dari semua bilangan real $\mathbb{R}$, himpunan semua bilangan real negatif, dan himpunan kosong "∅".

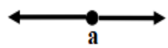
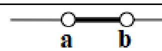
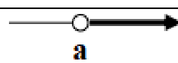
Selang angka-angka antara a dan b, termasuk a dan b, sering dilambangkan dengan $[a, b]$. Dua bilangan itu disebut "titik-titik ujung" (*endpoints*) suatu selang. Di negara-negara di mana bilangan desimal ditulis menggunakan tanda koma, tanda titik koma dapat digunakan sebagai pemisah, untuk menghindari kerancuan.

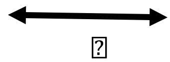
Untuk mengindikasikan bahwa satu dari titik-titik ujung tidak disertakan dalam himpunan, tanda kurung siku "[ ]" dapat diganti dengan tanda kurung “( ) atau “] [“, demikian juga sebaliknya. Jadi, dalam notasi ungkapan himpunan,

$$(a, b) =]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid \mathbf{a < x < b}\}$$
$$(a, b] =]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid \mathbf{a < x \leq b}\}$$
$$[a, b) = [a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid \mathbf{a \leq x < b}\}$$
$$[a, b] = [a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid \mathbf{a \leq x \leq b}\}$$

Perhatikanbahwa (a, a), $[a, a)$, dan $(a, a]$ melambangkan himpunan kosong, sedangkan $[a, a]$ melambangkan himpunan $\{a\}$. Ketika $a > b$,maka keempat notasi ini biasanya diasumsikan melambangkan himpunan kosong. Selang bilangan real dapat digolongkan ke dalam 11 jenis yang berbeda, di mana a dan b adalah bilangan real, dengan a < b:

Tabel 1.1 Selang Bilangan Real

No.	Istilah	Selang	Himpunan	Grafik
1.	Kosong	[b, a] (a, a) [a, a) (a, a]	{ } = ∅	
2.	Degenerasi	[a, a]	{a}	
3.	Terbuka	(a, b)	$\{x \in \mathbb{R} \mid \mathbf{a < x < b}\}$	
4.	Tertutup	[a, b]	$\{x \in \mathbb{R} \mid \mathbf{a \leq x \leq b}\}$	
5.	Tertutup kiri dan terbuka kanan	[a, b)	$\{x \in \mathbb{R} \mid \mathbf{a \leq x < b}\}$	
6.	Terbuka kiri dan tertutup kanan	(a, b]	$\{x \in \mathbb{R} \mid \mathbf{a < x \leq b}\}$	
7.	Terbuka kiri	(a, ∞)	$\{x \in \mathbb{R} \mid \mathbf{a < x}\}$	

No.	Istilah	Selang	Himpunan	Grafik
8.	Tertutup kiri	$[a, \infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid \mathbf{a \leq x}\}$	
9.	Terbuka kanan	$(-\infty, b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid \mathbf{x < b}\}$	
10.	Tertutup kanan	$(-\infty, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid \mathbf{x \leq b}\}$	
11.	Tak berbatas di kedua ujungnya	$(-\infty, \infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid -\infty < \mathbf{x} < \infty\}$	

(Sumber: Penulis, 2023)

1.5. Ketaksamaan

Dalam matematik, **ketaksamaan** merujuk kepada suatu hubungan yang tidak bersifat sama nilai antara kedua nilai. Ini digunakan untuk membandingkan dua bilangan dalam garis bilangan berdasarkan urutan besar bilangan. Ada beberapa bentuk yang digunakan untuk mewakili ketaksamaan-ketaksamaan ini:

1. $a < b$ bermakna a adalah **lebih kecil daripada** b.
2. $a > b$ bermakna a adalah **lebih besar daripada** b.

Kedua ketaksamaan di atas, a tidak sama dengan b. Hubungan ini dikenal sebagai **ketaksamaan kuat**, yakni a secara tetap lebih besar/kecil daripada b, dan persamaan adalah dikecualikan.

Sebaliknya, ada dua jenis ketaksamaan yang tidak kuat:

1. $a \leq b$ bermakna a **lebih kecil atau sama dengan** b (yakni nilai lebih besar adalah b atau tidak lebih besar daripada b).
2. $a \geq b$ bermakna a **lebih besar atau sama dengan** b (yakni nilai lebih kecil adalah b atau tidak lebih kecil daripada b).

Relasi **tidak lebih besar daripada** juga boleh ditulis sebagai $a \ngtr b$, bentuk "lebih besar daripada" beserta tanda palang, "tidak", dan juga bagi **tidak lebih kecil daripada**; $a \nless b$. Tulisan $a \neq b$ bermakna a tidak sama dengan b; dan kadangkala disifatkan sebagai ketaksamaan kuat. Ini tidak menyatakan sama ada satu nilai adalah lebih besar mahupun kecil daripada nilai satu lagi.

Dalam satu gaya tulisan kurang formal untuk bentuk "jauh lebih besar/kecil", ditulis:

1. $a \ll b$ bermakna a adalah **jauh lebih kecil daripada** b.
2. $a \gg b$ bermakna a adalah **jauh lebih besar daripada** b.

Kedua bentuk di atas bersifat simetri; sebagai contoh $a < b$ dan $b > a$ adalah pernyataan yang setara. Demikian juga $a \leq b$ dan $b \geq a$ adalah setara.

1.6. Sifat-sifat Urutan

1. Trikotomi

Jika x dan y adalah bilangan-bilangan, maka pasti satu di anatara berikut berlaku:

$$x < y \text{ atau } x = y \text{ atau } x > y$$

2. Transitif

Sifat transitif ketaksamaan menyatakan bahawa bagi mana-mana bilangan nyata a, b, c:

Jika $a \leq b$ dan $b \leq c$, maka $a \leq c$.

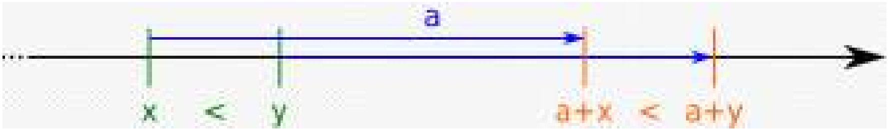
Jika *mana-mana* premis itu adalah ketaksamaan ketat, maka kesimpulannya juga bersifat ketat:

Jika $a \leq b$ dan $b < c$, maka $a < c$.

Jika $a < b$ dan $b \leq c$, maka $a < c$.

3. Penambahan dan pengurangan

Jika $x < y$, maka $x + a < y + a$.



Gambar 1.2 Penambahan dan Pengurangan

(Sumber: Penulis, 2023)

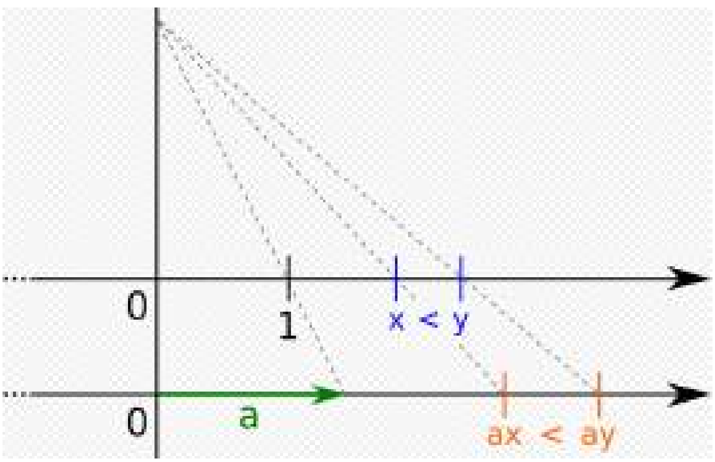
Setiap konstanta *c* mungkin ditambah atau dikurangi daripada kedua belah ketaksamaan. Jadi, untuk sembarang bilangan nyata a, b, c:

Jika $a \leq b$, maka $a + c \leq b + c$ dan $a - c \leq b - c$.

Dalam erti kata lain, hubungan ketaksamaan dikekalkan dalam penambahan (atau pengurangan) dan bilangan nyata ialah kumpulan teratur di bawah penambahan.

4. **Perkalian dan Pembagian**

Jika $x < y$ dan $a > 0$, maka $ax <$ ay.Jika $x < y$ dan $a < 0$, maka $ax >$ ay.



Sifat yang berurusan dengan Perkalian dan Pembagian menyatakan bahawa bagi sebarang bilangan nyata, a, b dan bilangan bukan sifar c:

Jika $a \leq b$ dan $c > 0$, maka $ac \leq bc$ dan $a/c \leq b/c$.

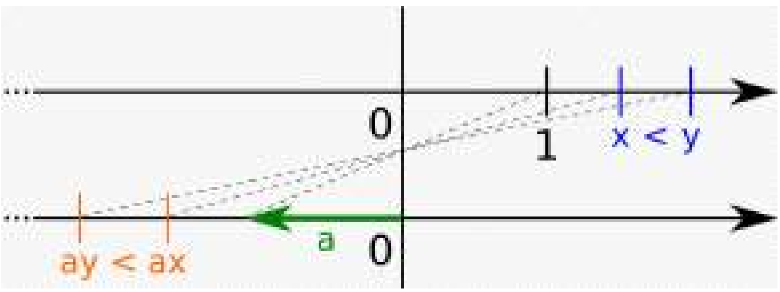
Jika $a \leq b$ dan $c < 0$, maka $ac \geq bc$ dan $a/c \geq b\ /c$.

Dalam erti kata lain, hubungan ketaksamaan dikekalkan di bawah Perkalian dan Pembagian dengan pemalar positif, tetapi diterbalikkan apabila pemalar negatif terlibat. Secara umum, ini terpakai untuk medan teratur.

5. **Penambahan Terbalik**

Sifat penambahan terbalik menyatakan bahwa bagi sebarang bilangan nyata a dan b:

Jika $a \leq b$, maka $-a \geq -b$.



6. **Perkalian Silang**

Jika kedua bilangan adalah positif, maka hubungan ketaksamaan antara perkalian silang adalah bertentangan dengan hubungan antara bilangan asal. Lebih khusus lagi, untuk sebarang bilangan nyata bukan sifar a dan b yang keduanya positif (atau keduanya negatif):

Jika $a \leq b$, maka $1\boxed{a} \geq 1\boxed{b}$.

Semua kasus untuk tanda a dan b juga boleh ditulis dalam notasi berantai, seperti berikut:

Jika $0 < a \leq b$, maka $1\boxed{a} \geq 1\boxed{b} > 0$.

Jika $a \leq b < 0$, maka $0 > 1\boxed{a} \geq 1\boxed{b}$.

Jika $a < 0 < b$, maka $1\boxed{a} < 0 < 1\boxed{b}$.

1.7. Latihan Soal dan Jawaban

1. Periksa, apakah bilangan di bawah ini merupakan bilangan rasional atau bukan?

   a. 0,222...

   Jawab:

   0,222... = ?

   Misal 0,222... = x, karena digit berulang yang sama ada satu yaitu 2, maka kedua ruas dikali 10, hasilnya:

   $$\begin{array}{l} 0{,}222\ldots = x \\ \underline{2{,}222\ldots = 10x}\ - \\ 2 = 9x \Rightarrow x = \frac{2}{9} \end{array}$$

   karena 0,222... dimisalkan x, maka 0,222... = $\frac{2}{9}$

   karena 0,222... dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan a dan b bulat, b ≠ 0, maka 0,222... merupakan bilangan rasional.

   b. 0,232323...

   Jawab:

   0,232323... = ?

   Misal 0,232323... = x, karena digit berulang yang sama ada dua yaitu 2 dan 3, maka kedua ruas dikali 100, hasilnya:

   $$\begin{array}{l} 0{,}232323\ldots = x \\ \underline{23{,}232323\ldots = 100x}\ - \\ 23 = 99x \Rightarrow x = \frac{23}{99} = 0{,}232323\ldots \end{array}$$

Jadi, diperoleh kesimpulan bahwa: 0,232323... merupakan bilangan rasional.

c. 0,234234234...

Jawab:

0,234234234... = ?

Misal 0,234234234... = x, karena digit berulang yang sama ada tiga yaitu 2, 3, dan 4, maka kedua ruas dikali 1000, hasilnya:

0,234234234... = x

234,234234234... = 1000x _

234 = 999x $\Rightarrow$ x = $\frac{234}{999}$ = 0,234234234...

Jadi, diperoleh kesimpulan bahwa: 0,234234234... merupakan bilangan rasional.

d. 0,1234234234...

Jawab:

0,1234234234... = ?

Kerjakan sebagai latihan dengan cara diusahakan digit di belakang koma menjadi berulang sama.

2. Periksa, apakah bilangan di bawah ini merupakan bilangan rasional atau bukan?

a. $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\ldots}}}$

Jawab:

$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\ldots}}}$ = ?

Misalkan: $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\ldots}}}$ = x, kedua ruas dikuadratkan, diperoleh:

$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\ldots}}} = x$

$2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\ldots}}} = x^2$:

$2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\ldots}}} : \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\ldots}}} = x^2 : x$

$2 = x$. Jadi, $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\ldots}}} = 2$ merupakan bilangan rasional.

b. $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\cdots}}}$

<u>Jawab</u>:

$\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\cdots}}} = ?$

Misalkan: $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\cdots}}} = x$, kedua ruas dikuadratkan, diperoleh:

$\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6\ldots}}} = x$

$6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6\ldots}}} = x^2$ –

$6 = x^2 - x \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0$

$\Rightarrow (x + 2)(x - 3) = 0$

$\Rightarrow x + 2 = 0$ atau $x - 3 = 0$

$\Rightarrow x = -2$ atau $x = 3$

Karena nilai x merupakan nilai akar, minimal nilainya = 0, maka nilai $x = -2$ tidak memenuhi.

Jadi, $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6\ldots}}} = 3$ merupakan bilangan rasional.

3. Buktikan, jika $a, b \in \mathbb{R}$ dan $a < b$, maka $a < \frac{1}{2}(a + b) < b$

   <u>Bukti</u>:

   Jika $a < b$, maka, $a+a < a+b$ dan $a+b < b+b$, diperoleh:

$2a < a+b$ dan $a + b < 2b$, akibatnya: $2a < a+b < 2b$.
Selanjutnya ketiga ruasnya dibagi 2, diperoleh:
$a < \frac{1}{2}(a + b) < b$, terbukti.

4. Buktikan, jika a dan b bilangan real dengan $a \geq 0$ dan $b \geq 0$, asalkan keduanya tidak 0 secara bersamaan, maka:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

<u>Bukti</u>:

Jika salah satu dari a atau b sama dengan 0, tetapi yang lain tidak 0, maka kedua ruas nilainya sama dengan 0, sehingga kesamaan dipenuhi. Jika $a > 0$ dan $b > 0$, maka diperoleh: $(a - b)^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$$
$$\Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab$$
$$\Leftrightarrow (a + b)^2 \geq 4ab$$
$$\Leftrightarrow a + b \geq 2\sqrt{ab}$$
$$\Leftrightarrow 2\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}, \text{ Terbukti.}$$

DAFTAR PUSTAKA

Advernesia (2020). *Pengertian Angka, Bilangan, dan Jenis Sistem Bilangan*. https://www.advernesia.com/blog/matematika/angka-dan-bilangan/ [Tersedia: 30 Juni 2023].

Purcell, Rawuh & Bana Kartasasmita (1985). *Kalkulus dan Geometri Analitis.* Jakarta: Erlangga.

Panjat (2019). *"Inequality Definition (Illustrated Mathematics Dictionary)". www.mathsisfun.com. Tersedia pada 2019-12-03.*

Polyanin, A.D.; Manzhirov, A.V. (2006). Handbook of Mathematics for Engineers and Scientists. CRC Press. m/s. 29. ISBN 978-1-4200-1051-0. Tersedia pada 2021-11-19.

Weisstein, Eric W. "Much Less". mathworld.wolfram.com (dalam bahasa Inggeris). Tersedia pada 2019-12-03.

Drachman, Bryon C; Cloud, Michael J. (2006). Ketaksamaan: Dengan Aplikasi Kejuruteraan. m/s. 2–3. ISBN 0-3872-2626-5. More than one of |author= dan |last1= specified (bantuan)

BAB 2

FUNGSI

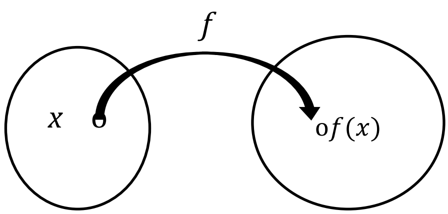
Oleh Novrianti, S.Si., M.Si., Ph.D.

2.1. Pendahuluan

Jika anda melihat suatu persamaan matematis, adakalanya persamaan tersebut merupakan suatu fungsi, ada pula yang bukan merupakan fungsi. Maka dari itu, dibutuhkan pemahaman tentang fungsi agar dapat membedakan suatu persamaan merupakan suatu fungsi atau bukan. Dalam bab ini akan dibahas mengenai pengertian fungsi, nilai-nilai fungsi, sistem koordinat kartesius, grafik fungsi, yang kemudian di akhir adalah latihan soal-soal tentang materi terkait.

2.2. Pengertian Fungsi

Fungsi adalah suatu alat utama yang digunakan dalam menggambarkan dunia nyata ke dalam bentuk matematis (Giordano, 2001). Fungsi dapat digambarkan sebagai diagram panah sebagai berikut.



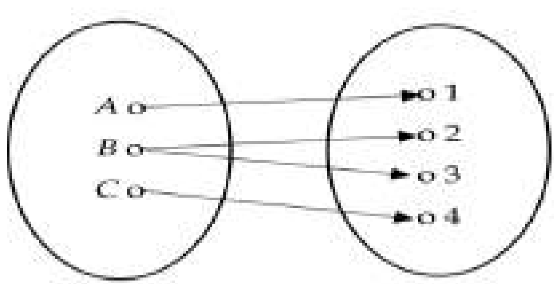
Gambar. 2.1 Diagram panah fungsi f

(Sumber: Penulis, 2023)

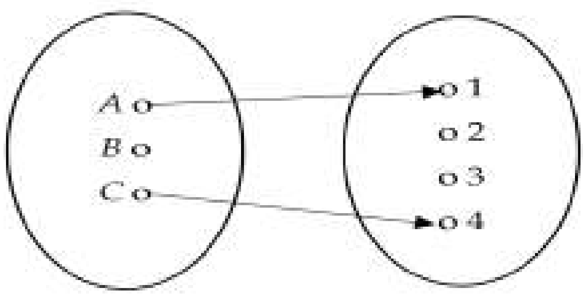
Fungsi, dituliskan/dinotasikan dengan $\boldsymbol{f(x)}$, didefinisikan sebagai suatu aturan korespondensi (padanan) yang menghubungkan **setiap objek $\boldsymbol{x}$** dalam suatu himpunan daerah asal (domain) dengan **suatu nilai tunggal $\boldsymbol{f(x)}$** pada suatu himpunan ke dua (daerah kawan (kodomain)). Hasil dari padanan yang diperoleh dengan cara demikian, disebut dengan daerah hasil fungsi, atau biasa disebut dengan range.

Untuk memahami definisi tersebut, perhatikan gambar beserta penjelasan di bawah ini dengan teliti!

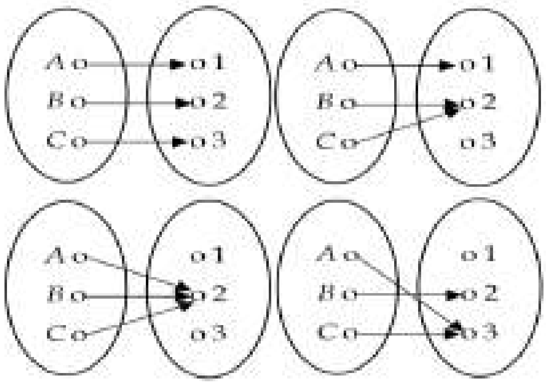
1. Gambar di bawah ini bukanlah merupakan suatu fungsi. Hal ini dikarenakan adanya anggota pada domain yang memiliki lebih dari satu tujuan pada kodomain.



2. Gambar di bawah ini bukanlah merupakan fungsi. Hal ini dikarenakan adanya anggota pada domain yang tidak memiliki tujuan pada kodomain.

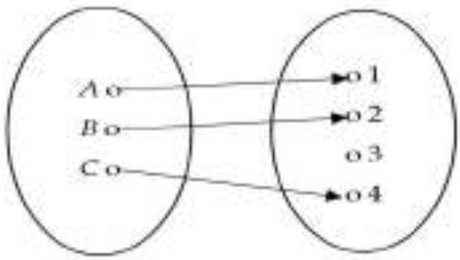


3. Keempat Gambar disamping merupakan **fungsi**. Hal ini dikarenakan setiap anggota pada domain memiliki tepat satu tujuan/pasangan pada kodomain.



Domain dari suatu fungsi merupakan daerah asal terjadinya pergerakan (pemetaan) fungsi. Domain merupakan bagian yang sangat mempengaruhi fungsi, dan menjadi syarat utama agar fungsi tersebut dapat terdefinisi dengan baik. Daerah kedua merupakan seluruh daerah yang mengandung kawasan fungsi tersebut di petakan (diarahkan/digerakkan), disebut dengan daerah kawan (**kodomain**). Sedangkan daerah yang menjadi tujuan utama fungsi tersebut, yang berpadanan langsung dengan domainnya, disebut dengan daerah hasil (**range**).

Untuk memahami perbedaan dari domain, kodomain, dan range, perhatikan diagram panah berikut.



Gambar. 2.2 Diagram Panah

(Sumber: Penulis, 2023)

Pada Gambar.2.2, dideskripsikan ketiga daerah domain, kodomain, dan range sebagai berikut:

- ✓ Domain : $D = \{A, B, C\}$.
- ✓ Kodomain : $K = \{1, 2, 3, 4\}$.
- ✓ Range : $R = \{1, 2, 4\}$.

2.3. Nilai Fungsi

Fungsi $f(x)$ memiliki nilai yang bergantung kepada daerah asalnya. Berdasarkan Gambar 1 dan Gambar 2, hal ini bearti notasi $f(x)$ merepresentasikan bahwasanya x adalah **domain** fungsi tersebut, dan $f(x)$ adalah hasilnya, atau nilai dari fungsi tersebut yang biasanya disebut dengan **range**.

Contoh 1.

Untuk nilai $x = 3$, tentukanlah nilai dari $f(x) = x^2 - 1$.

Penyelesaian:

Jika $x = 3$, maka untuk menentukan nilai dari $f(x)$ untuk suatu $f(x) = x^2 - 1$, kita perlu menggantikan seluruh x pada $f(x)$ dengan domain yang diberikan, yakni:

Diketahui $x =$, dan $f(x) = x^2 - 1$, maka dengan menggantikan seluruh x dengan 3, akan diperoleh nilai dari fungsi tersebut adalah $f(3) = 3^2 - 1 = 9 - 1 = \mathbf{8}$.

Contoh 2.

Jika $f(x) = x^2 + 1$, sederhanakanlah $f(4 + h) - f(4)$!

Penyelesaian:

Untuk menyederhanakan $f(4 + h) - f(4)$, kita butuh untuk mendapatkan nilai dari masing – masing fungsi tersebut. Perhatikan proses berikut dengan baik dan teliti!

Diketahui $f(x) = x^2 + 1$, maka terlebih dahulu perlu dicari $f(4)$, dan $f(4 + h)$.

- ✓ $x = 4$, maka $f(4) = 4^2 + 1 = 17$.
- ✓ $x = 4 + h$, maka $f(4 + h) = (4 + h)^2 + 1 = h^2 + 8h + 17$.

Sehingga $f(4 + h) - f(4) = h^2 + 8h + 17 - 17 = h^2 + 8h$.

Tidak semua nilai dari suatu fungsi dapat ditentukan. Oleh karena itu, agar suatu fungsi mempunyai nilai yang nyata, haruslah fungsi tersebut terdefinisi dengan baik. Fungsi akan terdefinisi dengan baik jika semua nilai x, sebagai domain dari fungsi tersebut, memenuhi syaratnya.

Syarat domain untuk beberapa fungsi khusus yakni sebagai berikut:

a. Jika dipunyai fungsi berbentuk pecahan $\frac{1}{f(x)}$, maka penyebut pecahan tersebut tidak boleh nol, atau $f(x) \neq 0$.

b. Jika dipunyai suatu fungsi dalam berntuk akar, $\sqrt{f(x)}$, maka seluruh bagian di bawah akar tidak boleh nol, atau $f(x) \geq 0$.

c. Jika dipunyai suatu fungsi berbentuk logaritma $\log_{g(x)} f(x)$, maka nilai basis harus positif tetapi tidak boleh sama dengan satu, $g(x) > 0$; $g(x) \neq 1$, dan selanjutnya nilai numerus haruslah positif, $f(x) > 0$.

Jika kriteria domain fungsi tersebut telah terpenuhi dengan baik, maka kita dapat menentukan nilai dari fungsi yang berpadanan dengan domain yang diberikan. Untuk dapat menentukan suatu fungsi agar dapat memiliki nilai yang nyata, maka terlebih dahulu harus diperiksa keadaan domain dari fungsi tersebut.

Contoh 3.

Tentukan daerah asal dari $f(x) = \frac{1}{x-3}$, agar $f(x)$ terdefinisi dengan baik.

Penyelesaian:

$f(x)$ yang kita punyai pada soalan tersebut merupakan jenis fungsi pecahan. Maka perlu diperika keadaan penyebut dari fungsi tersebut sehingga fungsi tersebut terdefinisi dengan baik. Maka,

$$x - 3 \neq 0 \iff x \neq 3.$$

Jadi domain dari $f(x)$, yang selanjutnya dituliskan dengan D_f, agar $f(x)$ terdefinisi dengan baik adalah $D_f = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 3\}$.

Nilai dari suatu fungsi merupakan hasil pemetaan bayangannya terhadap domain yang telah diberikan. Setelah mendapatkan domain yang menjadikan fungsi terdefinisi dengan baik, maka fungsi tersebut dapat dicari nilainya, dan dapat pula ditentukan batasan nilai dari fungsi tersebut, dengan menemukan nilai maksimum dan minimumnya.

Contoh 4.

Jika $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, tentukan bayangan dari $f(x) = x^3 - 4$.

Penyelesaian:

Kita perlu mencari nilai dari $f(x)$ untuk masing – masing nilai x yang diberikan.

- ✓ $x = -2$, maka $f(-2) = (-2)^3 - 4 = -12$.
- ✓ $x = -1$, maka $f(-1) = (-1)^3 - 4 = -5$.
- ✓ $x = 0$, maka $f(0) = (0)^3 - 4 = -4$.
- ✓ $x = 1$, maka $f(1) = (1)^3 - 4 = -3$.
- ✓ $x = 2$, maka $f(2) = (2)^3 - 4 = 4$.

Jadi nilai dari $f(x) = x^3 - 4$ dengan domain pada $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ adalah $\{-12, -5, -4, -3, \ 4\}$. Dalam bentuk lain, nilai fungsi (range) tersebut dapat ditulis dalam bentuk $R_f = \{-12, -5, -4, -3, \ 4\}$.

Contoh 5.

Tentukan range dari $f(x) = \frac{1}{x-3}$, untuk $x > 4$.

Penyelesaian:

Karena $f(x)$ merupakan suatu fungsi yang berbentuk pecahan, maka perlu diperiksa domain dari $f(x)$. Domain dari $f(x)$ telah didapatkan pada **Contoh 3**, yakni $D_f = \{x \neq 3 | x \in \mathbb{R}\}$.

Selanjutnya, pada instruksi soal dikatakan bahwasanya $x > 4$. Kondisi ini adalah memenuhi keadaan dari D_f. Hal ini bermakna, $f(x)$ dapat dicari pada interval buka tersebut. Untuk mendapatkan range dari $f(x)$, perlu diketahui nilai terendah, dan nilai tertinggi dari $f(x)$. Hal ini ditentukan dengan mengestimasi nilai $f(x)$ pada setiap titik $x > 4$, yang kemudian dilakukan generalisir terhadap nilai yang diperoleh.

Estimasi nilai $x \geq 4$:

- ✓ $x = 4$, maka $f(4) = \frac{1}{4-3} = 1$.
- ✓ $x = 5$, maka $f(5) = \frac{1}{5-3} = \frac{1}{2} = 0.5$.
- ✓ $x = 6$, maka $f(6) = \frac{1}{6-3} = \frac{1}{3} = 0.333\ldots$.
- ✓ $x = 7$, maka $f(7) = \frac{1}{7-3} = \frac{1}{4} = 0.25$.
- ✓ $x = 8$, maka $f(5) = \frac{1}{8-3} = \frac{1}{5} = 0.2$.
- ✓ ... dst
- ✓ $x = 103$, maka $f(103) = \frac{1}{103-3} = \frac{1}{100} = 0.01$.
- ✓ $x = 1003$, maka $f(1003) = \frac{1}{1003-3} = \frac{1}{1000} = 0.001$.
- ✓ ... dst

Sehingga, untuk nilai x yang sangat besar, dapat digeneralisir bahwsanya nilai dari $f(x)$ akan mendekati nol, atau $f(x) \approx 0$.

Berdasarkan hasil perhitungan di atas, diperoleh bahwasanya untuk $x \geq 4$, maka nilai $f(x)$ terkecil adalah mendekati 0, dan terbesar adalah 1. Oleh karena itu himpunan daerah hasil dari fungsi $f(x)$ untuk batasan $x \geq 4$ akan dituliskan dalam bentuk $R_f = \{0 < f(x) \leq 1 |\, f(x) \in \mathbb{R}\}$.

Selanjutnya, $f(x)$ akan direpresentasikan dalam bentuk grafis pada bidang XOY.

2.4. Sistem Koordinat Kartesius

Bidang gambar yang pada umumnya dipakai adalah bidang XOY. Bidang gambar ini ditemukan oleh Renè Descartes, dan diberi nama dengan bidang kartesius. Himpunan titik-titik pada garis vertikal dan horizontal pada salib sumbu pada bidang ini, dihubungkan secara berpasangan yang dituliskan dengan format (x, y), dan dinamakan dengan koordinat titik. Garis horizontal merepresentasikan nilai x, yang kemudian disebut dengan sumbu$-x$, dan garis vertikal merepresentasikan nilai y, yang disebut dengan sumbu– y.

Sumbu $-x$ dan sumbu$-y$ pada bidang kartesius dipertemukan tepat pada titik $(0, 0)$ yang diberi nama dengan titik pangkal / titik asal. Sebagai akibatnya, bidang kartesius dibagi menjadi empat daerah, yaitu:

- ✓ Daerah I yang memuat nilai x positif, dan y positif. Disebut dengan kuadran I.
- ✓ Daerah II yang memuat nilai x negatif, dan y positif. Disebut dengan kuadran II.
- ✓ Daerah III yang memuat nilai x negatif, dan y negatif. Disebut dengan kuadran III.
- ✓ Daerah IV yang memuat nilai x positif, dan y negatif. Disebut dengan kuadran IV.

Tak jarang pula nilai dari x pada sistem koordinat disebut dengan **absis**, dan nilai dari y disebut dengan **ordinat**.

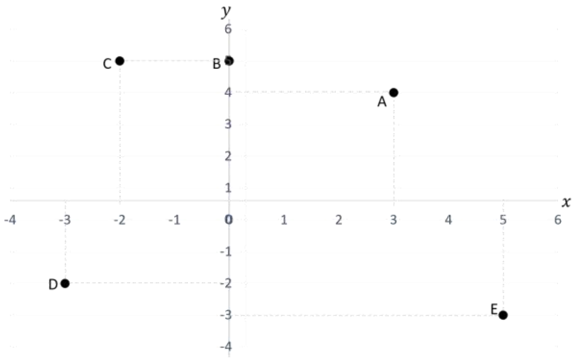
Contoh 6.

Letakkan posisi titik – titik berikut pada bidang XOY.

1. Titik A yang berkoordinat $(3, 4)$.
2. Titik B yang berkoordinat $(0, 5)$.
3. Titik C yang berkoordinat $(-2, 5)$.
4. Titik D yang memiliki absis -3, dan berordinat -2.
5. Titik E yang memiliki absis 5, dan berordinat -3.

Penyelesaian:

Perhatikan dengan baik dan benar posisi masing-masing penempatan titik pada bidang XOY berikut!



Gambar 2.3 Koordinat titik A, B, C, D, dan E pada bidang XOY

(Sumber: Penulis, 2023)

2.5. Grafik Fungsi

Di dalam ilmu geometri, representasi fungsi dapat dituangkan secara grafis dengan menggunakan persamaan $f(x) = y$. Hal ini bermakna bahwasanya fungsi digambarkan dalam bidang XOY denga menggunakan koordinat (x, y) dimana x merupakan domain dari fungsi tersebut, dan y merupakan nilai dari fungsi tersebut.

Untuk memudahkan dalam menggambarkan grafik dari suatu fungsi, kita memerlukan beberapa langkah berikut.

1. Melalui x yang diberikan/diketahui, tentukan ordinat/nilai y dengan menggunakan $f(x) = y$.
2. Susunlah sedemikian rupa himpunan pasangan beruru-tan yang diperoleh dari langkah 1, dalam bentuk koordinat (x, y).
3. Plot setiap titik yang diperoleh dari pasangan berurutan yang telah dibentuk dari langkah 2, pada bidang XOY.
4. Hubungkan setiap titik yang telah digambarkan secara berurutan dari x yang terkecil menuju nilai x yang terbesar.

5. Perhaluslah grafis yang telah diperoleh dengan cara menambah estimasi titik, atau dengan menghilangkan sudut-sudut yang terbentuk dengan menjadikan grafik menjadi kurva yang lebih mulus.

Contoh 7.

Gambarlah grafik persamaan $y = x^2 - 3$!

Penyelesaian:

Karena $y = x^2 - 3$ bukan merupakan salah satu bentuk fungsi khusus, maka fungsi ini tidak harus dicari domain yang menjadikannya terdefinisi. Dengan kata lain, fungsi $f(x) = y = x^2 - 3$ terdefinisi untuk semua x bilangan riil. Selanjutnya adalah mengikuti Langkah-langkah untuk membuat grafik.

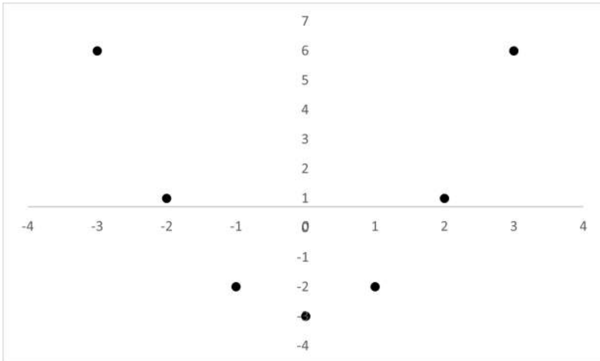
1. Mendapatkan koordinat titik-titik yang memenuhi persamaan, dengan memilih sebarang nilai x.

Tabel 2.1 Koordinat Titik-titik yang Memenuhi Persamaan $\boldsymbol{y = x^2 - 3}$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	6	1	-2	-3	-2	1	6
(x, y)	(-3,6)	(-2,1)	(-1,-2)	(0,-3)	(1,-2)	(2,1)	(3,6)

(Sumber: Penulis, 2023)

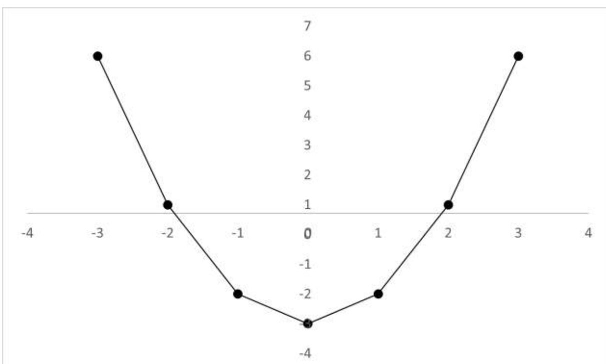
2. Plot titik-titik pada bidang XOY



Gambar 2.4 Plot titik-titik pada Bidang XOY

(Sumber: Penulis, 2023)

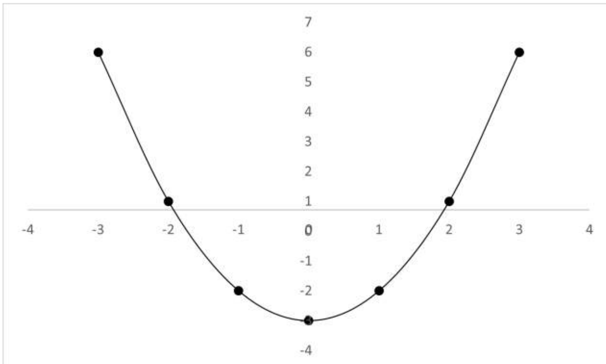
3. Menghubungkan titik-titik menjadi sebuah kurva



Gambar 2.5 Menghubungkan Setiap Titik

(Sumber: Penulis, 2023)

4. Kurva Mulus



Gambar 2.6 Kurva Mulus

(Sumber: Penulis, 2023)

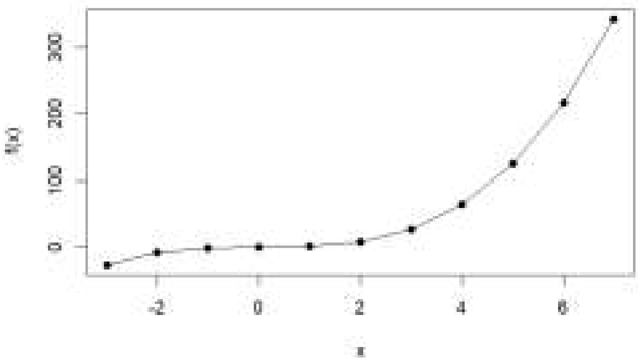
2.6. Soal Latihan

Sketsalah grafik dari setiap fungsi – fungsi berikut dengan mengikuti langkah – langkah pembuatan grafik fungsi, hingga menghasilkan kurva mulus!

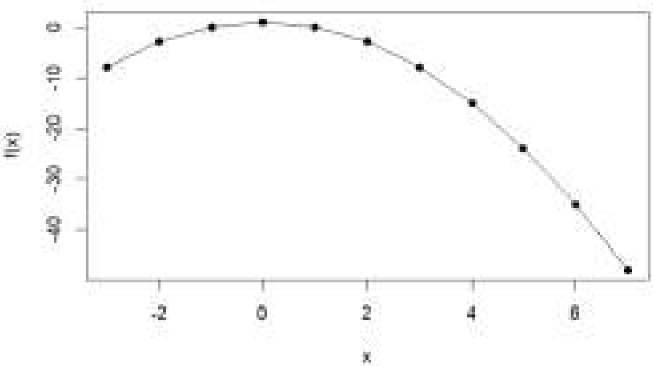
1. $y = x^3$
2. $y = -x^2 + 1$
3. $x^3 + y = 9$
4. $y = x^3 - x$
5. $y = \frac{x}{x^2+1}$

Penyelesaian:

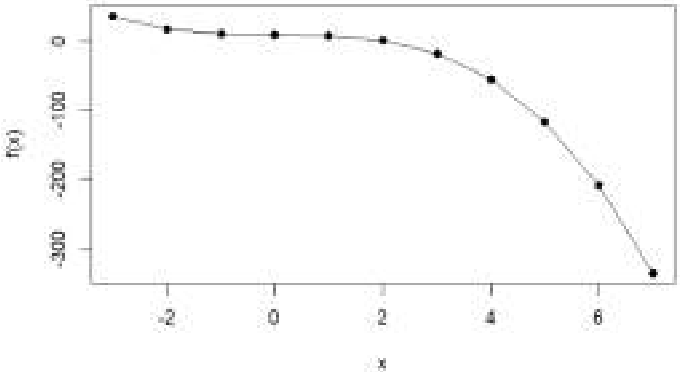
1. Grafik dari $f(x) = y = x^3$



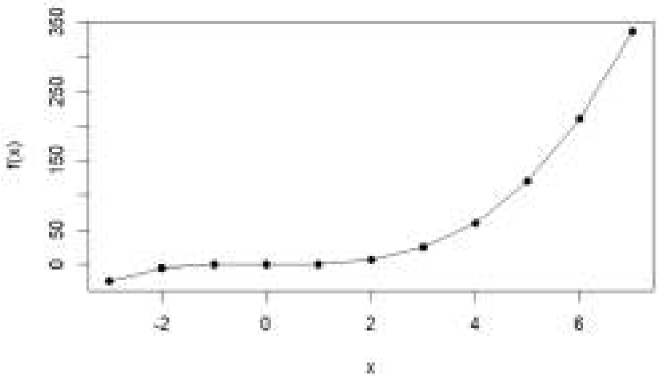
2. Grafik dari $f(x) = y = -x^2 + 1$



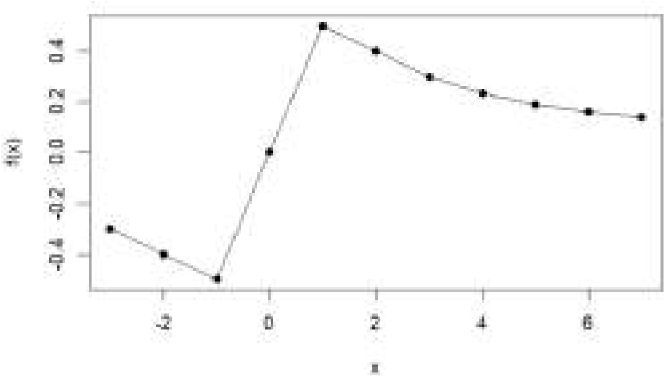
3. Grafik dari $x^3 + y = 9 \iff y = 9 - x^3$



4. Grafik dari $y = x^3 - x$



5. Grafik dari $y = \frac{x}{x^2+1}$



DAFTAR PUSTAKA

Giordano, FW. 2001. *Thomas' Calculus, tenth edition*. New York: Addison Wesley.

Varberg, D., Purcell, E.J., dan Rigdon, S.E. 2004. Kalkulus edisi ke VIII, Jilid I, Erlangga, Jakarta.

Varberg, D., Purcell, E.J., dan Rigdon, S.E. 2010. *Calculus* 9th edition. Pearson, New York.

BAB 3

NILAI MUTLAK

Oleh Novrianti, S.Si.,M.Si., Ph.D.

3.1. Pendahuluan

Pengertian Nilai Mutlak

Definisi 3.1.1: *Nilai mutlak dari x adalah x jika* $x \geq 0$, *atau* $-x$ *jika* $x < 0$, *yang kemudian dituliskan*

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x\,; \text{ jika } x \geq 0, & \ldots(i) \\ -x\,; \text{ jika } x < 0. & \ldots(ii) \end{cases}$$

Untuk memahami definisi 3.1.1 ini, perhatikan beberapa contoh di bawah ini:

a. Mutlak dari 2 ditulis dengan $|2|$. Karena nilai di dalam tanda mutlak adalah non negatif, maka kondisi pada Definisi 3.1.1 yang dipakai adalah persamaan (i), sehingga ditulis $|2| = 2$.
b. Mutlak dari -2 ditulis dengan $|-2|$. Karena nilai di dalam tanda mutlak adalah negatif, maka persamaan yang digunakan adalah (ii) pada Definisi 3.1.1, sehingga kita dapat menuliskannya dengan $|-2| = -(-2) = 2$. (Purcell, 2010)

Secara sederhana, nilai mutlak dapat dikatakan sebagai suatu nilai yang **selalu bernilai non–negatif** , dan hanya berlaku untuk bilangan riil. Jadi jika ditemui suatu nilai tak tentu di dalam tanda mutlak, yang biasanya disimbolkan dengan huruf ataupun fungsi, maka yang harus kita lakukan adalah mencari nilai variabel tersebut dengan menjabarkannya sesuai dengan Definisi nilai mutlak. Tentu dengan menggunakan definisi ini akan menghasilkan sifat nilai mutlak, kemungkinan operasi yang terjadi di dalam nilai mutlak, pemecahan kendala yang harus dipenuhi dalam operasi nilai mutlak, dan kemungkinan – kemungkinan lainnya.

3.2. Sifat-Sifat Nilai Mutlak

Sifat-sifat nilai mutlak dapat ditunjukkan/dibuktikan dengan sangat mudah dengan menggunakan definisi nilai mutlak, yakni definisi 3.1.1. Sifat-sifat nilai mutlak terlihat lebih mudah untuk persoalan perkalian dan pembagian. Akan tetapi dalam hal penjumlahan dan pengurangan membutuhkan analisa yang baik.

Berdasarkan Definisi 3.1.1 terlihat bahwasanya untuk suatu nilai mutlak sebarang $x, x \in \mathbb{R}$, maka akan ada dua kondisi yang mungkin terjadi, yakni x, atau $-x$.

Maka, jika ada dua bilangan riil sebarang, *a* dan *b,* yang kemudian penjabaran nilai mutlaknya dituliskan seperti di bawah ini,

$$|a| = \begin{cases} a\,;\ jika\ a \geq 0, & \ldots(iii) \\ -a\,; jika\ a < 0. & \ldots(iv) \end{cases} \qquad |b| = \begin{cases} b\,;\ jika\ b \geq 0, & \ldots(v) \\ -b\,; jika\ b < 0. & \ldots(vi) \end{cases}$$

maka kita akan mengoperasikan kedua bilangan mutlak tersebut terhadap operasi kali, bagi, tambah, dan kurang.

Perhatikanlah operasi-operasi berikut secara teliti, dimana dalam penguraiannya akan menggunakan persamaan (iii) hingga (vi).

a. Sifat operasi perkalian pada nilai mutlak. Beranjak dari definisi nilai mutlak dan kemungkinan-kemungkinan yang terjadi jika dua bilangan dikalikan, maka perhatikan dengan seksama analisa di bawah ini.

$$|\boldsymbol{ab}| = \begin{cases} ab = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\ ;\ \text{jika } a \geq 0, \text{dan } b \geq 0, \\ -ab = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\ ;\ \text{jika } a < 0, \text{dan } b \geq 0, \\ a(-b) = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|; \text{jika } a \geq 0, \text{dan } b < 0, \\ (-a)(-b) = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|; \text{jika } a < 0, \text{dan } b < 0. \end{cases}$$

Karena pada semua keadaan nilai a dan b, operasi perkalian dari kedua bilangan tersebut di dalam tanda mutlak menghasilkan penyelesaian yang sama, maka dapat disimpulkan bahwa $|ab| = |a||b|$.

Sifat I: $|\boldsymbol{ab}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$.

b. Sifat operasi pembagian pada nilai mutlak
Perhatikan analisa keadaan a dan b pada operasi pembagian di dalam tanda mutlak berikut:

$$\left|\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}\right| = \begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}\ ;\ \text{jika } a \geq 0, \text{dan } b \geq 0, \\ \frac{-a}{b} = \frac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}\ ;\ \text{jika } a < 0, \text{dan } b \geq 0, \\ \frac{a}{-b} = \frac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|};\ \text{jika } a \geq 0, \text{dan } b < 0, \\ \frac{-a}{-b} = \frac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|};\ \text{jika } a < 0, \text{dan } b < 0. \end{cases}$$

c. Hasil pembagian di dalam tanda mutlak pada kedua bilangan a dan b merepresentasikan bayangan yang serupa, maka dapat disimpulkan bahwa $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

Sifat II: $\left|\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}\right| = \frac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}$.

d. Sifat operasi penjumlahan pada nilai mutlak untuk Hukum penjumlahan, perlu diperhatikan kondisi-kondisi nilai mutlak pada masing-masing bilangannya. Ingat uraian persamaan (iii) hingga (vi)

Dengan menggunakan definisi 3.1.1, operasi nilai mutlak penjumlahan dapat dituliskan dalam bentuk

$$|a+b| = \begin{cases} a+b\ ; & \text{jika } a+b\ \geq 0, \\ -(a+b); & \text{jika } a+b\ < 0. \end{cases} \qquad \ldots(vii)$$

Perhatikan analisa terhadap operasi penjumlahan, jika diketahui kedua bilangan a dan b memiliki kondisi tertentu seperti yang disebutkan di bawah ini!

I. $a \geq 0, dan\ b \geq 0.$

   Karena $a, b \geq 0$, maka $|a| = a,\ \ |b| = b$. Lebih dari itu, berdasarkan kondisi a dan b yang non negatif, maka $a + b \geq 0$. Sehingga, berdasarkan (vii), nilai mutlak dari operasi penjumlahan ini dapat ditulis menjadi $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| = \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \ |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|$

II. $a < 0, dan\ b \geq 0.$

   Hal ini bearti $a + b < (-a) + b$.

   Berdasarkan kondisi a dan b, maka dapat dituliskan $|a| = -a$, dan $|b| = b$.

   Maka,

   - Jika $a + b\ \geq 0$, bearti $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| = a + b <\ (-a) + b = |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|$.
   - Jika $a + b\ < 0$, bearti $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| = -(a+b) = (-a) + (-b) <\ (-a) + b = |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|$.

   Berdasarkan kedua kasus di atas, maka dapat disimpulkan bahwa $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| < |\boldsymbol{a}| +$

III. $|\boldsymbol{b}| a \geq 0, dan\ b < 0.$

   Hal ini bearti $a + b < a + (-b)$.

   Berdasarkan kondisi a dan b, maka dapat dituliskan $|a| = a$, dan $|b| = -b$.

Maka,

- Jika $a + b \geq 0$, bearti $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| = a + b < a + (-b) = |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|$**.**
- Jika $a + b < 0$, bearti $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| = -(a + b) = (-a) + (-b) < a + (-b) = |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|$.

Berdasarkan kedua kasus di atas, maka dapat disimpulkan bahwa $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| < |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|$.

IV. $a < 0, dan\ b < 0$.

Hal ini bearti $a + b < \mathbf{0} < (-a) + (-b)$.
Berdasarkan kondisi a dan b, maka dapat dituliskan $|a| = -a$, dan $|b| = -b$.
Maka $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| = -(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = (-\boldsymbol{a}) + (-\boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|$.
Berdasarkan kasus I – IV di atas, maka dapat disimpulkan bahwa $|a + b| \leq |a| + |b|$.
Sifat III: $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| \leq |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|$.

e. Sifat pada operasi pengurangan di dalam nilai mutlak diperoleh dengan melakukan analisa berikut:
Perhatikan bahwa $a - b + b = a$
$\Leftrightarrow |a - b + b\ | = |a|$.
Dengan menggunakan sifat pada poin c, maka

$$|(a - b) + b\ | \leq |a - b| + |b|$$

$$\Leftrightarrow \quad |a| \leq |a - b| + |b|$$
$$\Leftrightarrow \quad |a| - |b| \leq |a - b|$$
$$\Leftrightarrow \quad |a| - |b| \leq |a - b|$$

Atau dapat dituliskan bahwa $|a - b| \geq |a| - |b|$.

Sifat IV: $|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}| \geq |\boldsymbol{a}| - |\boldsymbol{b}|$.

Jadi, sifat – sifat nilai mutlak adalah:

I. $|ab| = |a||b|$;

II. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$;

III. $|a + b| \leq |a| + |b|$;

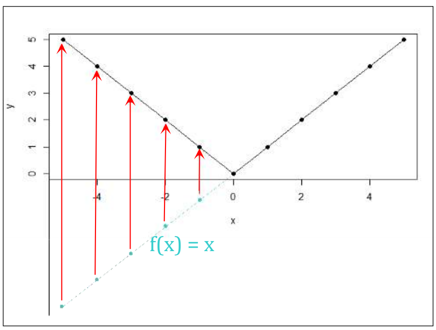
IV. $|a - b| \geq |a| - |b|$.

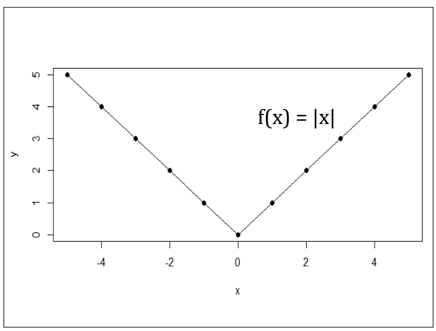
3.3. Fungsi Nilai Mutlak dan Grafiknya

Berdasarkan Definisi 3.1.1, dengan menggantikan x menjadi fungsi yang diperumum atau $f(x)$, maka fungsi nilai mutlak dapat dituliskan sebagai

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x)\ ;\ \text{jika } f(x) \geq 0, \\ -f(x)\ ;\ \text{jika } f(x) < 0. \end{cases}$$

Fungsi nilai mutlak yang paling sederhana adalah fungsi pada Definisi 3.1.1, yakni $f(x) = |x|$. Perubahan grafik $f(x) = x$, atau sebelum ada tanda mutlak, dan $f(x) = |x|$ dapat dilihat pada gambar 3.1, dan 3.2 berikut.





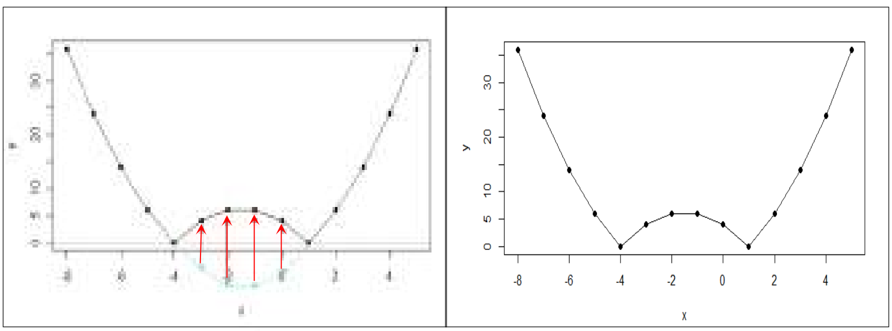
Gambar 3.1 Grafik $\boldsymbol{f(x) = x}$ yang dipantulkan ke y positif.

Gambar 3.2 Grafik $\boldsymbol{f(x) = |x|}$.

(Sumber: Penulis, 2023)

Pada Gambar 3.1 dapat dilihat bahwasanya gambar dari suatu fungsi $f(x) = x$ (sebelum diberi nilai mutlak) adalah garis lurus yang terbagi ke dalam dua jenis nilai, yakni nilai negatif (garis hijau), dan non negatif (pelurus garis hijau, yang berwarna hitam). Akan tetapi, nilai mutlak $|x|$ adalah suatu nilai yang non negatif, maka semua nilai $f(x)$ yang bernilai negatif, yakni pada garis hijau dipantulkan ke sumbu$-y$ positif, yang dilukiskan dengan garis hitam beserta titik-titiknya (ditunjukkan oleh garis panah merah). Jika garis hijau dihilangkan, sebagai akibatnya kita akan memperoleh grafik dari fungsi nilai mutlak $f(x) = |x|$ dapat dilihat pada gambar di sebelahnya, Gambar 3.2.

Selanjutnya, berdasarkan definisi nilai mutlak, maka untuk menggambarkan semua fungsi di dalam tanda mutlak adalah dilakukan dengan cara merefleksikan bayangan yang bernilai negatif dari fungsi tersebut terhadap sumbu$-x$ sehingga di dapat nilai fungsi yang non$-$negatif. Berikut adalah beberapa contoh grafik fungsi nilai mutlak disertai dengan proses memantulkan nilai negatifnya:

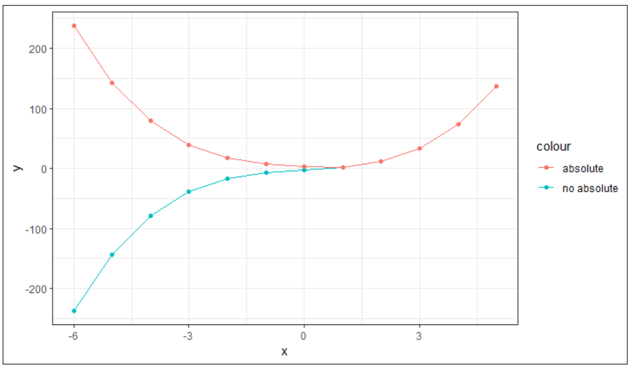


Gambar 3.3 Grafik $\left|\boldsymbol{x^2+3x-4}\right|$ dengan Proses Refleksi Bayangan Negatifnya

(Sumber: Penulis, 2023)

Pada Gambar 3.3 terlihat bahwsanya untuk $x \in (-4,1)$, fungsi memiliki nilai negatif. Lengkungan garis yang berwarna hijau merupakan daerah yang harus dipantulkan. Oleh karena itu, refleksi nilai – nilai tersebut ke sumbu–y positif terlihat pada lengkungan garis yang berwarna hitam. Jadi representasi grafis dari $f(x) = |x^2 + 3x - 4|$ secara nyata dapat dilihat pada Gambar 3.4.

Selanjutnya akan diperlihatkan grafik fungsi berpangkat tiga, yakni $f(x) = x^3 + 3x - 3$. Pada Gambar 3.5 di bawah ini, tidak lagi diberikan panah arah pantulan dari nilai negatif fungsi tersebut, tetapi para pembaca diharapkan mampu menemukan grafik $|f(x)|$, dan yang bukan $|f(x)|$.



Gambar 3.4 Representasi grafis $|f(x)|$ dan $f(x)$.

(Sumber: Penulis, 2023)

3.4. Penyelesaian Persoalan Nilai Mutlak

Persoalan yang mungkin ditemui dalam suatu fungsi nilai mutlak adalah persoalan dalam bentuk kesamaan dan ketaksamaan. Sebagaimana namanya, kesamaan merupakan persoalan yang menggunakan penyetaraan nilai di kiri dan kanan fungsi, dan disimbolkan dengan tanda samadengan (=). Disamping itu ketaksa-maan bearti proses penyelesaian persoalan nilai mutlak dengan membandingkan nilai pada ruas kiri dan ruas kanan dengan meng-gunakan tanda selain samadengan, yakni $>$, $\geq$, $<$, $\leq$, dan/atau $\neq$.

Proses penyelesaian persoalan kesamaan ataupun ketaksamaan nilai mutlak adalah berkaitan erat dengan definisinya, yaitu Definisi 3.1.1.

3.4.1. Bentuk Kesamaan

Dalam menyelesaikan kesamaan (tidak jarang/ sering juga disebut per-samaan) nilai mutlak dapat diselesaikan dengan menggunakan Definisi 3.1.1, yang kemudian dilakukan penjabaran terhadap semua item yang muncul.

Contoh 1: Tentukan nilai x yang memenuhi persamaan $|x+2| = 5$.

Jawab: Nilai mutlak $|x+2|$ dapat dijabarkan menjadi

$$|x+2| = \begin{cases} x+2\ ; \text{ jika } x+2 \geq 0, \\ -(x+2)\ ; \text{jika } x+2 < 0. \end{cases}$$

Sebagai akibatnya, persamaan $|x+2| = 5$ diselesaikan dengan penguraian berdasarkan kondisi $x+2 \geq 0$, dan $x+2 < 0$, yakni:

$$|x+2| = 5 \rightarrow \begin{cases} x+2 = 5 \rightarrow \boldsymbol{x = 3}. \\ -(x+2) = 5 \rightarrow \boldsymbol{x = -7}. \end{cases}$$

Jadi nilai x yang memenuhi persamaan $|x+2| = 5$ adalah $\boldsymbol{x = 3}$**,** dan $\boldsymbol{x = -7}$.

3.4.2. Bentuk Ketaksamaan

1. Ketaksamaan kurang dari

Dalam proses penyelesaian ketaksamaan kurang dari ($<$), hal ini bearti juga berlaku untuk ketaksamaan kurang dari sama dengan ($\leq$). Perhatikan penulisan ketaksamaan nilai mutlak berikut :

$$|x| < a;\ a \in \mathbb{R} \qquad \cdots\ (viii)$$

Persamaan $(viii)$ memiliki arti bahwasanya

$$|x| = \begin{cases} x;\ \text{jika } x \geq 0 \ \Rightarrow \boldsymbol{x} < \boldsymbol{a}; \\ -x;\ \text{jika } x < 0 \Rightarrow\ -x < a\ atau\ \boldsymbol{x} > -\boldsymbol{a}. \end{cases}$$

Berdasarkan uraian ini dapat disimpulkan bahwa

$$|\boldsymbol{x}| < \boldsymbol{a} \ \Rightarrow -\boldsymbol{a} < \boldsymbol{x} < \boldsymbol{a}\,, \qquad \ldots\ (ix)$$

yang dibaca x lebih dari $-a$ tetapi kurang dari a.

Secara umum persamaan (ix) dapat dituliskan dalam bentuk ketaksamaan fungsi nilai mutlak berupa

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})| < \boldsymbol{a} \ \Rightarrow -\boldsymbol{a} < \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) < \boldsymbol{a}\,. \qquad \ldots\ (\text{x})$$

Contoh 2. Selesaikan ketaksamaan $|x - 4| < 2$!

Jawab : Menurut persamaan (x), maka perhatikanlah dengan baik analisa di bawah ini

$$|x - 4| < 2$$

$$\Leftrightarrow\ -2 < x - 4 < 2$$

$$\Leftrightarrow\ -2 + 4 < x - 4 + 4 < 2 + 4$$

$$\Leftrightarrow\ \boldsymbol{2} < \boldsymbol{x} < \boldsymbol{6}$$

Jadi penyelesaian dari $|x - 4| < 2$ adalah $\{x \mid \boldsymbol{2} < \boldsymbol{x} < \boldsymbol{6},\ x \in \mathbb{R}\}$.

2. Bentuk Lebih dari

Perhatikan penulisan ketaksamaan nilai mutlak berikut :

$$|x| > a;\ a \in \mathbb{R} \qquad \cdots\ (xi)$$

Persamaan (xi) memiliki arti bahwasanya

$$|x| = \begin{cases} x:\ \text{jika } x \geq 0 \ \Rightarrow \boldsymbol{x} > \boldsymbol{a}; \\ -x:\ \text{jika } x < 0 \Rightarrow\ -x > a \text{ atau } \boldsymbol{x} < -\boldsymbol{a}. \end{cases}$$

Berdasarkan uraian ini dapat disimpulkan bahwa

$$|\boldsymbol{x}| > \boldsymbol{a} \;\Rightarrow \boldsymbol{x} < -\boldsymbol{a} \text{ atau } \boldsymbol{x} > \boldsymbol{a}. \qquad \dots\ (xii)$$

Secara umum persamaan (xii) dapat dituliskan dalam bentuk ketaksama-an fungsi nilai mutlak berupa

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})| > \boldsymbol{a} \;\Rightarrow \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) < -\boldsymbol{a} \text{ atau } \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) > \boldsymbol{a}\,. \qquad \dots\ (xiii)$$

Contoh 3. Selesaikan ketaksamaan $|x-4| > 2$!
Jawab : Menurut persamaan $(xiii)$, maka

$|x-4| > 2,$

$$\begin{array}{llllll}
\Leftrightarrow & x-4 & < -2 & \text{atau} & x-4 & > 2, \\
\Leftrightarrow & x-4+2 & < -2+2 & & x-4-2 & > 2-2, \\
\Leftrightarrow & x-2 & < 0 & & x-6 & > 0, \\
\Leftrightarrow & \boldsymbol{x} & < \mathbf{2} & & \boldsymbol{x} & > \mathbf{6}.
\end{array}$$

Jadi solusi dari $|x-4| > 2$ adalah $\{x \mid \boldsymbol{x} < \mathbf{2}$ atau $\boldsymbol{x} > \mathbf{6},\ x \in \mathbb{R}\}$.

3.4.3. Penyelesaian dengan menggunakan bentuk kuadrat

Berdasarkan sifat nilai mutlak $|ab| = |a||b|$, jika kita menggantikan a menjadi x, dan b juga diganti menjadi x, maka

$$|xx| = |x||x| \to |x^2| = |x|^2.$$

Karena bilangan kuadarat adalah selalu bernilai non–negatif , maka dapat dituliskan $x^2 = |x^2| = |x|^2$, dan sebagai akibatnya dapat disimpulkan bahwa

$$\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} = |\boldsymbol{x}|^{\mathbf{2}} \quad \cdots\ (xiv)$$

Contoh 4 : Tentukan nilai x jika diketahui $|x-2| = 3$.

Penyelesaian :

Perhatikan bahwa berdasarkan (xiv)maka $|x-2|^2 = (x-2)^2$.

Maka persoalan $|x-2| = 3$ dapat diselesaikan dengan mengkuadratkan kedua ruas persoalan tersebut, sehingga

$$\begin{aligned} |x-2|^2 = 3^2 &\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 9 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-5)(x+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \mathbf{5} \text{ atau } \boldsymbol{x} = -\mathbf{1}\,. \end{aligned}$$

Jadi nilai x yang memenuhi $|x-2| = 3$ adalah $\boldsymbol{x} = \mathbf{5}$ atau $\boldsymbol{x} = -\mathbf{1}$.

Hal yang menjadi perhatian disini adalah untuk persoalan sederhana seperti Contoh 4 di atas ternyata lebih mudah diselesaikan dengan menggunakan definisi nilai mutlak sebagaimana yang telah dibahas pada Contoh 1. Hal ini bearti, tidak semua persoalan nilai mutlak dapat diselesaikan dengan mudah menggunakan bentuk kuadrat, *kecuali* :

a) Persoalan dalam bentuk ketaksamaan;
b) Kedua ruas pada persoalan ketaksamaan nilai mutlak memiliki nilai sama-sama positif, atau sama – sama negatif. Akibatnya, tanda ketidaksamaan akan berubah jika kedua ruas dari persoalan ketaksamaan bernilai negatif, tetapi tidak berubah jika kedua ruas bernilai positif.

Contoh 5. Selesaikan ketaksamaan $|3x+1| < |x-6|$.

Penyelesaian :

Perhatikan ketaksamaan $|3x+1| < |x-6|$. Karena kedua ruas merupakan fungsi nilai mutlak, hal ini bearti kedua ruas memiliki nilai sama–sama positif atau non–negatif (red. Ingat bahasa sederhana nilai mutlak adalah bilangan yang selalu positif/ non–negatif). Maka,

$$|3x+1| < |x-6|$$

$$\Leftrightarrow |3x+1|^2 < |x-6|^2$$

$$\Leftrightarrow |3x+1|^2 - |x-6|^2 < 0$$

$$\Leftrightarrow (3x+1)^2 - (x-6)^2 < 0$$

$$\Leftrightarrow \big((3x+1)+(x-6)\big)\big((3x+1)-(x-6)\big) < 0$$

$$\Leftrightarrow (4x-5)(2x+7) < 0$$

$$\Leftrightarrow \ -\boldsymbol{\frac{7}{2}} < \boldsymbol{x} < \boldsymbol{\frac{5}{4}}.$$

Jadi nilai x yang memenuhi $|3x+1| < |x-6|$ adalah $-\boldsymbol{\frac{7}{2}} < \boldsymbol{x} < \boldsymbol{\frac{5}{4}}$.

3.5. Soal – Soal Latihan

A. Kerjakanlah soal-soal berikut dengan baik, benar, teliti, dan cermat!

1. $\left|3x - \frac{1}{2}\right| = 3$
2. $|x-2| < 10$
3. $|2x+2| > 2$
4. $\left|\frac{x}{2} - 3\right| \geq 1$
5. $\left|\frac{2}{7} + 5x\right| \leq 2$
6. $|x-1| = |x-3|$
7. $|2(2x-3)| = |10+x|$
8. $|3x-1| < 2|x+6|$
9. $|x-1| > |x-3|$
10. $|2(2x-3)| \geq |10+x|$

B. Gambarkan grafik dari fungsi berikut!

1. $f(x) = \left|3x - \frac{1}{2}\right|$
2. $f(x) = |x - 2|$
3. $f(x) = |2x + 2|$
4. $f(x) = \left|\frac{x}{2} - 3\right|$
5. $f(x) = \left|\frac{2}{7} + 5x\right|$
6. $f(x) = |x - 1| - |x - 3|$
7. $f(x) = |2(2x - 3)| - 5$
8. $f(x) = |3x - 1| + 2|x + 6|$
9. $f(x) = |x - 1||x - 3|$
10. $f(x) = \frac{|2(2x-3)|}{|10+x|}$

Penyelesaian Soal – Soal Latihan

A. Perhatikan deskripsi penyelesaian dengan cermat.

1. $\left|3x-\frac{1}{2}\right| = 3$

$$\left|3x-\frac{1}{2}\right| = \begin{cases} 3x-\dfrac{1}{2} = 3 \rightarrow 3x = \dfrac{7}{2} \rightarrow \boldsymbol{x} = \dfrac{\mathbf{7}}{\mathbf{6}}. \\ -\left(3x-\dfrac{1}{2}\right) = 3 \rightarrow 3x = -\dfrac{5}{2} \rightarrow \boldsymbol{x} = -\dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{6}}. \end{cases}$$

3. $|2x+2| > 2$

$$\begin{array}{lcl} 2x+2 < -2 & atau & 2x+2 > 2 \\ 2x < -2-2 & & 2x > 2-2 \\ 2x < -4 & & 2x > 0 \\ \boldsymbol{x} < \mathbf{-2} & atau & \boldsymbol{x} > \mathbf{0}. \end{array}$$

5. $\left|\frac{2}{7}+5x\right| \leq 2$

$$\left|\frac{2}{7}+5x\right| \leq 2$$

$$\rightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{7}+5x \leq 2 \rightarrow 5x \leq \dfrac{12}{7} \rightarrow \boldsymbol{x} \leq \dfrac{\mathbf{12}}{\mathbf{35}} \\ -\left(\dfrac{2}{7}+5x\right) \leq 2 \rightarrow 5x \geq -\dfrac{16}{7} \rightarrow \boldsymbol{x} \geq -\dfrac{\mathbf{16}}{\mathbf{35}}. \end{cases}$$

7. $|2(2x-3)| = |10+x|$

$$|2(2x-3)| = |10+x|$$

$$\Leftrightarrow |2(2x-3)|^2 = |10+x|^2$$

$$\Leftrightarrow (2(2x-3)^2 = (10+x)^2$$

$$\Leftrightarrow (2(2x-3))^2 - (10+x)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \big(2(2x-3)+(10+x)\big)\big(2(2x-3)-(10+x)\big)=0$$

$$\Leftrightarrow (5x+4)(3x-16)=0$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{x=-\frac{4}{5}\ ;\ atau\ x=\frac{16}{3}}.$$

9. $|x-1|>|x-3|$

$$|x-1|>|x-3|$$

$$\Leftrightarrow |x-1)|^2>|x-3|^2$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2>(x-3)^2$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2-(x-3)^2>0$$

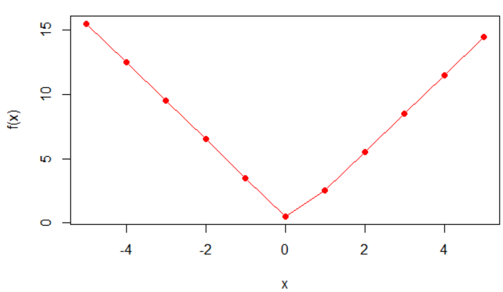
$$\Leftrightarrow \big((x-1)+(x-3)\big)\big((x-1)-(x-3)\big)>0$$

$$\Leftrightarrow (2x-4)(2)>0$$

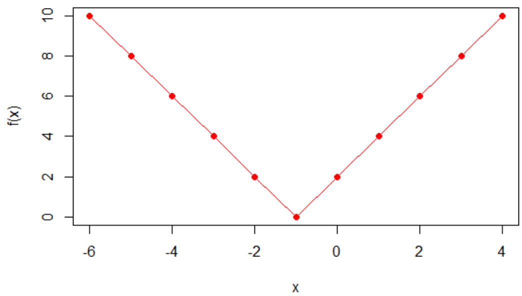
$$\Leftrightarrow \boldsymbol{x>2}.$$

B. Grafik fungsi nilai mutlak

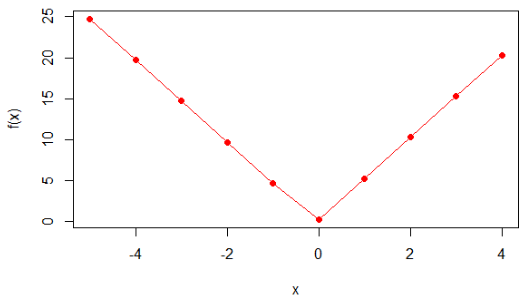
1. $f(x)=\left|3x-\frac{1}{2}\right|$



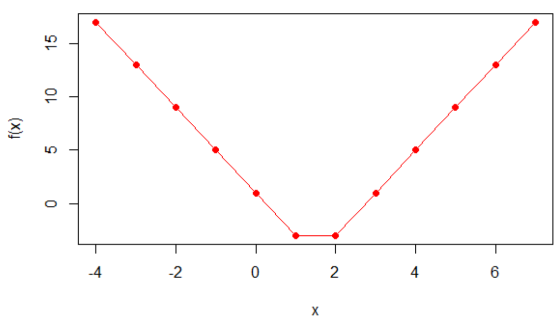
3. $f(x) = |2x + 2|$



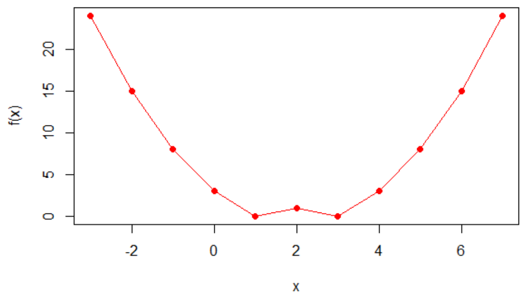
5. $f(x) = \left|\frac{2}{7} + 5x\right|$



7. $f(x) = |2(2x - 3)| - 5$



9. $f(x) = |x - 1||x - 3|$



DAFTAR PUSTAKA

Varberg, D., Purcell, E.J., dan Rigdon, S.E. 2004. Kalkulus edisi ke VIII, Jilid I, Erlangga, Jakarta.

Varberg, D., Purcell, E.J., dan Rigdon, S.E. 2010. *Calculus* 9th edition. Pearson, New York.

BAB 4

FUNGSI ALJABAR

Oleh Rifka Agustianti, M.Pd.

4.1. Pendahuluan

Fungsi Linier merupakan fungsi dengan pangkat paling tinggi variabelnya ialah pangkat satu. Sebuah persamaan linier jika diilustrasikan akan membentuk suatu garis lurus. Bentuk umumnya ialah :

$$y = a + bx$$

Dimana:

y = variabel terikat
x = variabel bebas
a = konstanta
b = koefisien dari x, arah atau gradien garis

4.1.1. Teknik Pembentukan Fungsi Linier

Suatu persamaan linier mampu dibuat dengan berbagai jenis teknik bergantung pada nilai yang diketahui. Teknik tersebut ialah:

1. Teknik dwi koordinat
2. Jika tersedia dua buah titik A(x_1, y_1) dan B(x_2, y_2) maka persamaan fungsi linier melalui titik-titik tersebut bisa ditentukan melalui formula:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

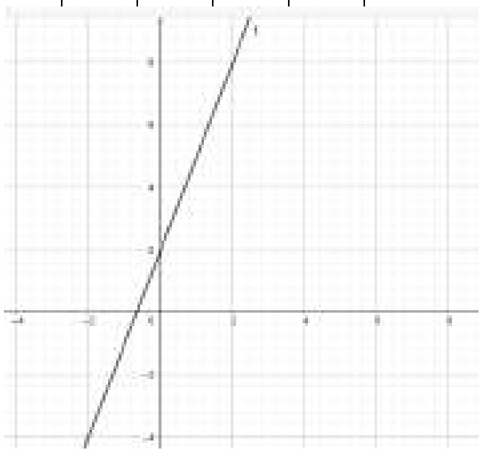
3. Teknik koordinat lereng
   Jika tersedia sebuah titik A (x_1, y_1) dan lereng garisnya b, maka persamaan liniernya ialah :
   $$y - y_1 = b(x - x_1)$$
4. Teknik penggal lereng
   Suatu persamaan linier bisa juga disusun jika diketahui penggalnya pada salah satu sumbu (a) serta lereng garis (b) yang memenuhi persamaan tersebut, sehingga formula yang digunakan ialah :
   $$y = ax + b$$
   Dimana a = penggal dan b = lereng
5. Teknik dwi penggal
   Suatu persamaan linier bisa juga disusun jika diketahui penggal garis pada setiap sumbu, yakni penggal pada sumbu vertikal (saat $x = 0$) serta penggal pada sumbu horizontal (saat $y = 0$), sehingga formula yang digunakan ialah:
   $$y = a - \frac{a}{c}x$$
   Dimana a = penggal vertikal dan c = penggal horizontal

4.1.2. Teknik Menggambar Grafik Fungsi Linier

Adapun teknik menggambar grafik fungsi linier (Sari, 2023) yaitu :

1. Teknik sederhana
   Yakni melalui penggunaan tabel x dan y, dengan cara menentukan terlebih dahulu nilai x sedemikian hingga akan menghasilkan nilai y
2. Teknik matematis
   Yakni melalui penetuan titik potong bagi sumbu x pada nilai pada $y = 0$, sehingga $x = a$, jadi titik potongnya ialah $A(a, 0)$ dan titik potong bagi sumbu $y$pada nilai pada $x = 0$, sehingga $y = b$, jadi titik potongnya ialah $B(0, b)$. Hubungkan kedua titik tersebut agar terbentuk sebuah garis persamaan linier.
3. Contoh 1 : $y = 2 + 3x$ (melalui Teknik sederhana)

x	-2	-1	0	1	2
y	-4	-1	2	5	8



Gambar 4.1 Grafik Fungsi Linier

(Sumber: Geobegra)

Contoh 2: $y = 2 + 3x$ (melalui Teknik matematis)

x	0	$-\frac{2}{3}$
y	2	0
(x, y)	(0,2)	$\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$

Dengan memisalkan $x = 0$ dan $y = 0$ sehingga didapat dua buah titik yaitu (0,2) dan (-2/3, 0)

4.1.3. Hubungan dua garis lurus

Berikut ini adalah persamaan linier dari hubungan dua garis lurus, yakni :

1. Dua garis lurus akan berimpit jika persamaan yang satu adalah kelipatan persamaan lainnya, misalnya : $y = 3x - 5$ dengan $2y = 6x - 10$
2. Dua garis akan sejajar jika memiliki gradien yang serupa, misalnya : $y = -5x + 2$ dengan $y = -5x + 3$
3. Dua garis akan berpotongan jika gradien yang satu tak serupa dengan gradien garis lainnya, misalnya : $y = 7x - 3$ dengan $y = -2x + 1$
4. Dua garis akan berpotongan tegak lurus jika gradien yang satu adalah lawan negatif dari gradien persamaan garis lainnya, misalnya : $y = \frac{1}{4}x + 3$ dan $y = -4x + 3$

4.1.4. Perpotongan Dua Fungsi Linier

Dalam menentukan titik potong fungsi linier yang saling berpotongan bisa digunakan berbagai metode yakni :

1. Metode grafik ialah metode yang dapat digunakan melalui 2 teknik yakni teknik sederhana serta teknik matematis pada koordinat kartesius
2. Metode Substitusi ialah teknik dalam mencari himpunan penyelesaian melalui penggantian sebuah variabel dengan variabel lainnya
3. Metode Eliminasi ialah teknik penyelesaian melalui teknik menghilangkan salah satu variabel guna menentukan nilai variabel lainnya.
4. Metode Campuran ialah teknik mencari himpunan penyelesaian melalui penggabungan metode eliminasi juga substitusi.

Contoh 3:

Tentukan titik potong fungsi $3x + 2y = -13$ dan $-2x - 3y = 2$ dengan metode substitusi, eliminasi, juga campuran !

1. Dengan menggunakan metode substitusi

$3x + 2y = -13$

$3x = -13 - 2y$

$x = \frac{-13-2y}{3}$ (masukkan ke persamaan 2)

$-2\left(\frac{-13-2y}{3}\right) - 3y = 2$ (kalikan 3)

$26 + 4y - 9y = 6$

$-5y = 6 - 26$

$-5y = -20$

$y = 4$

Kemudian substitusi $y = 4$ ke salah satu persamaan

$-2x - 3y = 2$

$-2x - 3(4) = 2$

$-2x - 12 = 2$

$-2x = 14$

$x = -7$

Sehingga, himpunan penyelesaiannya adalah $\{-7,4\}$

2. Dengan menggunakan metode eliminasi

Eliminasi variabel x

$$
\begin{array}{lll}
3x + 2y = -13 \quad \text{x (-2)} & \rightarrow & -6x - 4y = 26 \\
-2x - 3y = 2 \quad \text{x (3)} & \rightarrow & -6x - 9y = 6 \quad - \\
\hline
 & & 5y = 20 \\
 & & y = 4
\end{array}
$$

Eliminasi variabel y

$$
\begin{array}{lll}
3x + 2y = -13 \quad \text{x (-3)} & \rightarrow & -9x - 6y = 39 \\
-2x - 3y = 2 \quad \text{x (2)} & \rightarrow & -4x - 6y = 4 \quad - \\
\hline
 & & -5x = 35 \\
 & & x = -7
\end{array}
$$

Sehingga, himpunan penyelesaiannya ialah $\{-7,4\}$

3. Metode Campuran

Eliminasi variabel x

$$
\begin{array}{llcr}
3x + 2y = -13 & \text{x } (-2) & \rightarrow & -6x - 4y = 26 \\
-2x - 3y = 2 & \text{x } (3) & \rightarrow & -6x - 9y = 6 \\
\hline
 & & & 5y = 20 \\
 & & & y = 4
\end{array}
$$

Substitusi $y = 4$ ke salah satu persamaan

$3x + 2y = -13$

$3x + 2(4) = -13$

$3x + 8 = -13$

$3x = -13 - 8$

$3x = -21$

$x = -7$

Sehingga, himpunan penyelesaiannya adalah $\{-7,4\}$

4.2. Fungsi Kuadrat

Bisa dimaksudkan juga sebagai sebuah persamaan yang memiliki variabel dengan pangkat tertinggi dua. Hal tersebut merupakan salah satu karakteristik dari jenis fungsi kuadrat. Serupa dengan jenis persamaan yang lain, fungsi kuadrat juga memiliki bentuk umum yakni $f(x) = ax^2 + bx + c$

Fungsi kuadrat mempunyai karakteristik tertentu berdasarkan nilai koefisiennya, (Wayowan, 2013) yakni :

1. Berdasar pada nilai a $\rightarrow$ Apabila $a > 0$ maka nilai ekstrimnya minimum serta grafik parabolanya terbuka ke atas. Apabila $a < 0$ maka nilai ekstrimnya maksimum serta grafik parabolanya terbuka ke bawah
2. Berdasar pada nilai b $\rightarrow$ Apabila a juga b memiliki tanda serupa maka sumbu simetri berada pada bagian kiri sumbu Y. Apabila a juga b berbeda tanda maka sumbu simetri berada pada bagian kanan sumbu Y. Apabila $b = 0$ maka sumbu simetri berada tepat pada sumbu Y.

3. Berdasar pada nilai c → Apabila $c > 0$ maka grafik parabolanya memotong sumbu Y positif. Apabila $c = 0$ maka grafik parabolanya memotong sumbu Y di titik (0,0). Apabila $c < 0$ maka grafik parabolanya memotong sumbu Y negatif.
4. Berdasar pada nilai D (diskriminan) → Apabila $D > 0$ maka grafik parabolanya memotong sumbu X pada titik $(x_1, 0)$ serta $(x_2, 0)$. Apabila $D = 0$ maka grafik parabolanya menyinggung sumbu X pada titik $\left(-\frac{b}{2a}, 0\right)$. Apabila $D < 0$ maka grafik parabolanya tak memotong maupun menyinggung sumbu X.

4.2.1. Cara Menggambar Grafik Fungsi Kuadrat

Grafik fungsi kuadrat ialah sebuah grafik yang mampu mendeskripiskan ilustrasi gambar dari suatu persamaan atau fungsi kuadrat. Grafik fungsi kuadrat memiliki berbagai jenis karakter serta teknik menyusunnya. Terdapat tiga macam grafik pada fungsi kuadrat, yaitus $y = ax^2$, $y = ax^2 + c, dan\ y = a(x - h)^2 + k$.

Secara detail, menggambar grafik fungsi kuadrat dapat ditentukan dengan titik-titik kritis yakni perpotongan kurva dengan sumbu y ataupun sumbu x dan nilai ekstrim. Langkah-langkahnya ialah menentukan hal berikut :

1. Titik potong sumbu x, $y = 0$
2. Titik potong sumbu y, $x = 0$
3. Titik puncak $= \frac{-b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}$
4. Sumbu simetri dengan persamaan $x = \frac{-b}{2a}$

Berikut beberapa langkah dalam menyusun persamaan dan fungsi kuadrat:

1. Jika diketahui tiga titik koordinat, maka persamaannya ialah $y = ax^2 + bx + c$
2. Jika diketahui titik potong pada sumbu x juga titik yang dilaluinya. Formulanya ialah $y = a(x - x_1)(x - x_2)$.
3. Jika diketahui titik puncak serta satu titik lainnya. Formulanya ialah $y = a\left(x - x_p\right)^2 + y_p$

   Contoh 4 :

Gambarkan grafik fungsi kuadrat $y = x^2 - 4x - 5$

1. Titik potong sumbu x, $y = 0$

   $y = x^2 - 4x - 5$

   $0 = x^2 - 4x - 5$

   $(x - 5)(x + 1) = 0$

   $x = 5$ atau $x = -1$

   Sehingga titik potongnya ialah $(5{,}0)$ dan $(-1{,}0)$
2. Titik potong sumbu y, $x = 0$

   $y = x^2 - 4x - 5$

   $y = 0^2 - 4(0) - 5$

   $y = -5$

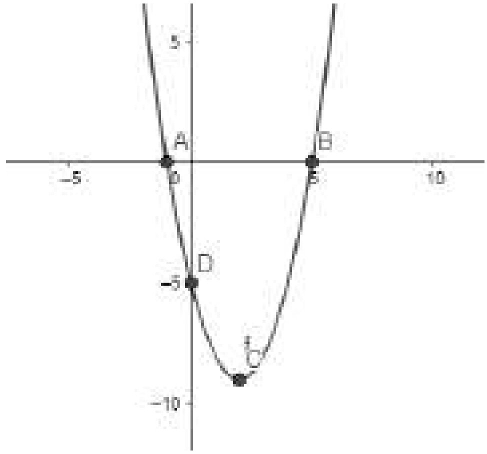
   Sehingga titik potongnya yakni $(0, -5)$
3. Titik puncak $= \frac{-b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}$

   $= \left(-\frac{-4}{2(1)}, -\frac{(-4)^2-4(1)(-5)}{4(1)}\right) = (2, -9)$

   Sehingga titik puncaknya yakni $(2, -9)$

4. Sumbu simetri dengan persamaan $x = \frac{-b}{2a}$

   $$x = -\frac{-4}{2(1)} = 2$$



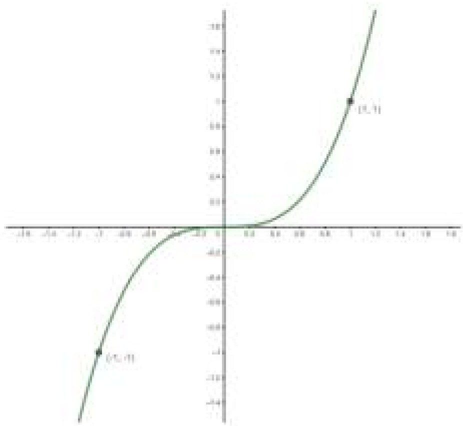
Gambar 4.2 Grafik Fungsi $y = x^2 - 4x - 5$

(Sumber: Geobegra)

4.3. Fungsi Ganjil

Perhatikan gambar fungsi $f(x) = x^3$ berikut :

x	$f(x)$	$-x$	$f(-x)^3$
1	1^3	-1	$(-1)^3 = -1$
2	2^3	-2	$(-2)^3 = -8$
3	3^3	-3	$(-3)^3 = -27$
4	4^3	-4	$(-4)^3 = -64$



Gambar 4.3 Grafik Fungsi $f(x) = x^3$

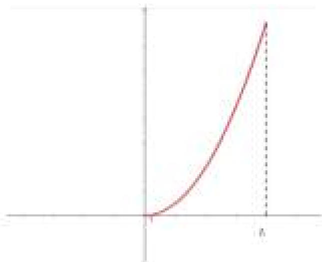
(Sumber: Kemdikbud, 2022)

Perhatikan nilai fungsi untuk $f(x)$ dan $f(-x)$. Tanpa menghitung dengan kalkulator, jika diketahui bahwa nilai fungsi f dititik $x = 5$ adalah 125, dapatkah kalian menghitung nilai fungsi f pada titik $x = -5$? Dengan memperhatikan nilai-nilai fungsi pada titik $x = a$ dan $x = -a$, perhatikan bahwa nilai fungsi f pada titik $x = -a$ adalah negatif dari nilai fungsi f pada titik $x = a$. Akibatnya, nilai fungsi f pada titik $x = -5$ adalah negatif dari nilai fungsi f di titik $x = 5$. Hal ini bisa ditulis dalam model matematika $f(-5) = -f(5)$ Jadi, nilai fungsi f pada titik $x = -5$ adalah -125

Jika berlaku secara umum di sebarang titik x, maka fungsi tersebut disebut fungsi ganjil. Jadi, suatu fungsi disebut fungsi ganjil jika memenuhi hubungan

$f(-x) = -f(x)$ atau $f(x) = -f(-x)$

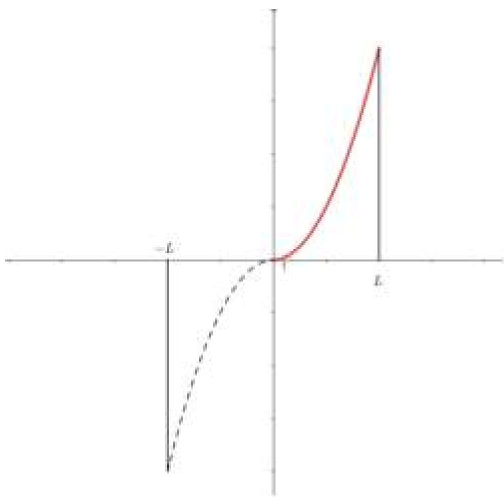
Perhatikan fungsi f yang terdefinisi pada domain [0,L] seperti Gambar 4.5:



Gambar 4.4 Fungsi f pada Domain [0,L]

(Sumber: Kemdikbud, 2022)

Agar menjadi fungsi ganjil, maka kita perluas domain menjadi $[-L, L]$ dengan nilai fungsi pada domain negatif bernilai negatif dari nilai fungsi pada domain positif seperti pada Gambar 4.6 dimana grafik fungsi ganjil $y = f(x)$ simetris terhadap titik asal



Gambar 4.5 Fungsi f pada Domain [-L,L]

(Sumber: Kemdikbud, 2022)

Jika fungsi pada Gambar 4.5 dinyatakan sebagai $f(x), 0 < x \leq L$ maka perluasan fungsi ganjil yang diperoleh pada Gambar 4.6 dapat dinyatakan sebagai fungsi g

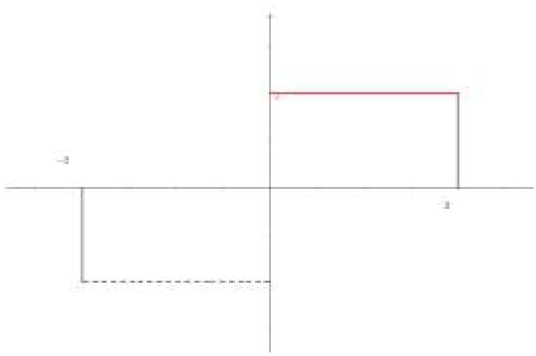
$$g(x) = \begin{cases} f(x), 0 < x \leq L \\ -f(-x), -L \leq x < 0 \end{cases}$$

Contoh 5 :

Diberikan fungsi $f(x), 0 < x \leq 2$. Tentukan perluasan fungsi ganjil dari fungsi f tersebut

Perluasan fungsi ganjil dari fungsi f tersebut adalah

$$g(x) = \begin{cases} 1, 0 < x \leq 2 \\ -1, -2 \leq x < 0 \end{cases}$$



Gambar 4.6 Perluasan Fungsi Ganjil Ganjil $f(x), 0 < x \leq 2$

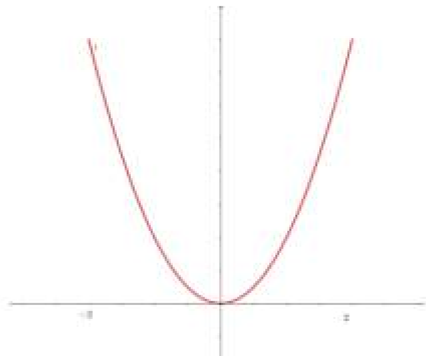
Sumber (Kemdikbud, 2022)

4.4. Fungsi Genap

Perhatikan kembali fungsi $f(x) = x^2$ pada Gambar 4.8

x	$f(x)$	$-x$	$f(-x)^2$
1	1^2	-1	$(-1)^2 = 1$
2	2^2	-2	$(-2)^2 = 4$

x	$f(x)$	$-x$	$f(-x)^2$
3	3^2	-3	$(-3)^2 = 9$
4	4^2	-4	$(-4)^2 = 16$

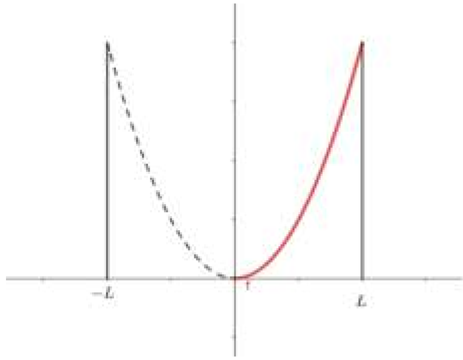


Gambar 4.7 Grafik Fungsi $f(x) = x^2$

(Sumber: Kemdikbud, 2022)

Perhatikan kembali nilai fungsi pada titik $x = a$ dan $x = -a$ untuk $a = 1, 2, 3\ dan\ 4$. Pada contoh di atas, diketahui bahwa nilai fungsinya sama di kedua titik tersebut. Dengan kata lain $f(a) = f(-a)$. Jika diketahui bahwa nilai fungsi pada titik $x = 25$ adalah 625, maka nilai fungsi pada titik $x = -25$ dapat langsung diketahui yaitu 625. Jika berlaku untuk keseluruhan domain fungsi, maka fungsi yang demikian ini disebut dengan fungsi genap dimana grafik fungsi ganjil $y = f(x)$ simetris terhadap sumbu y**.** Jadi, suatu fungsi disebut fungsi genap bila memenuhi hubungan $f(x) = f(-x)$ untuk setiap anggota domain x. Dengan demikian, bila diberikan suatu fungsi f yang terdefinisi pada domain $[0, L]$ seperti digambarkan pada Gambar 4.8 maka perluasan fungsi genap dari fungsi tersebut dapat dinyatakan sebagai fungsi g dan dilakukan dengan mendefinisikan fungsi pada domain $[-L, 0]$ sebagai berikut

$$g(x) = \begin{cases} f(x), 0 < x \leq L \\ f(-x), -L \leq x < 0 \end{cases}$$

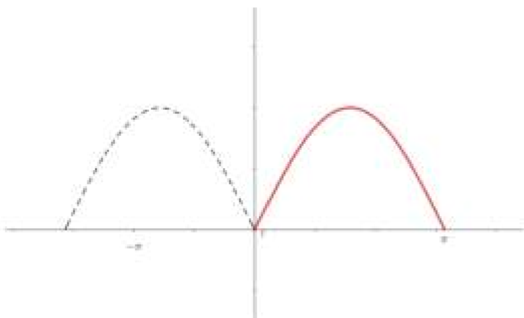


Gambar 4.8 Grafik Fungsi Genap

(Sumber: Kemdikbud, 2022)

Contoh 6:

Diberikan fungsi $f(x) = \sin x, 0 \leq x \leq \pi$. Tentukan perluasan fungsi genap dari fungsi f tersebut



Gambar 4.9 Grafik $f(x) = \sin x$

(Sumber: Kemdikbud, 2022)

Pada Gambar 4.10, kurva berwarna merah merupakan kurva dari $f(x)$. Perluasan fungsi genap dari fungsi tersebut dilakukan dengan mendefinisikan fungsi pada domain [-π, 0]. Jadi, perluasan fungsi genap dari fungsi f tersebut adalah

$$g(x) = \begin{cases} \sin(x), 0 < x \leq \pi \\ \sin(-x)\,, -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

Ingat bahwa $\sin(-x) = -\sin(x)$. Akibatnya fungsi g dapat juga dinyatakan dalam bentuk berikut

$$g(x) = \begin{cases} \sin(x), 0 < x \leq \pi \\ -\sin(x), -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

4.5. Soal-Soal Latihan

1. Tentukan titik potong fungsi $2x - 3y = 19$ dan $-x + 2y = -12$ dengan metode grafik dan metode campuran !
2. Tentukan fungsi berikut merupakan fungsi ganjil atau genap dan gambarkan grafiknya !
   a. $f(x) = x \cos x$
   b. $f(x) = x^3 - 3x$
3. Gambarkan grafik fungsi kuadrat berikut !
   a. $f(x) = -x^2 + 2x + 15$
   b. $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$

DAFTAR PUSTAKA

Kemdikbud (2022) *Worksheet Fungsi Ganjil dan Genap*. Available at: https://lmsspada.kemdikbud.

Sari, B. (2023) *Dasar-Dasar Aljabar dan Fungsi Linier*. Available at: https://www.scribd.com/document/625637334/141-20220307095317-Matek-PPT1-Fungsi#.

Wayowan, Y. (2013) *Fungsi Kuadrat*. Malang. Available at: http://ymayowan.lecture.ub.ac.id/files/2013/10/3.-FUNGSI-KUADRAT.pdf.

BAB 5

FUNGSI TRANSENDEN

Oleh Khairunnisa Fadhilla Ramdhania, S.Si., M.Si.

5.1. Pendahuluan

Pada subbab-subbab sebelumnya kita telah mempelajari definisi fungsi dan macam-macam fungsi diantaranya fungsi nilai mutlak, dan fungsi polinomial. Kita menyebut $y = f(x)$ fungsi aljabar jika memenuhi

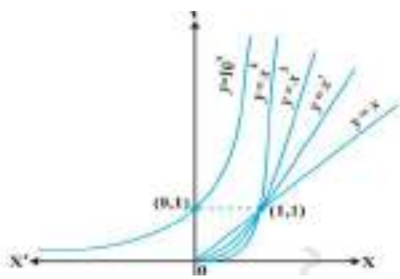
$$P_0 + P_1 y + \cdots + P_n y^n = 0$$

dengan P polinomial dalam x dengan koefisien bilangan rasional, sedangkan fungsi yang bukan fungsi aljabar disebut sebagai fungsi transenden. Pada bagian ini, kita akan membahas fungsi eksponensial dan fungsi logaritma. Selain itu, akan dibahas pula fungsi trigonometri dan siklometri.

5.2. Fungsi Eksponen dan Grafiknya

Pertama, amati Gambar 5.1 yang merupakan sketsa dari:

$$f_1(x) = x, f_2(x) = x^2, f_3(x) = x^3, \text{ dan } f_4(x) = x^4.$$



Gambar 5.1 Grafik Fungsi $f(x) = x^n, n = 1, 2, 3, 4$ dan $f(x) = 10^x$

(Sumber: NCERT, 2006)

Kita dapat melihat bahwa kurva semakin curam ketika pangkat x meningkat. Hal ini menandakan bahwa peningkatan tetap nilai x (> 1), beriringan dengan meningkatnya nilai $f_n(x)$ ketika n bertambah, $n = 1, 2, 3, 4$. Dengan begitu, dapat dibayangkan bahwa pernyataan tersebut benar untuk setiap $n > 0$, dengan $f_n(x) = x^n$. Artinya, kurva dari $f_n(x)$ akan cenderung mendekati sumbu y ketika n bertambah. Sebagai contoh, misalkan $f_{10}(x) = x^{10}$ dan $f_{20}(x) = x^{20}$. Jika x bertambah dari 1 menjadi 2, maka nilai f_{10} meningkat dari 1 menjadi 2^{10}, sedangkan nilai f_{20} meningkat dari 1 menjadi 2^{20}. Dengan demikian, untuk peningkatan nilai x yang sama, f_{20} tumbuh (bertambah) lebih cepat dari f_{10}.

Poin penting dari pembahasan di atas adalah pertumbuhan suatu fungsi polinomial bergantung pada derajat polinomnya, yakni semakin tinggi derajatnya, semakin besar pertumbuhannya. Kemudian muncul sebuah pertanyaan, adakah suatu fungsi yang pertumbuhannya lebih cepat dari fungsi polinom? Jawabannya adalah fungsi berikut:

$$f(x) = 10^x.$$

Dugaannya adalah fungsi tersebut tumbuh lebih cepat dari $f_n(x) = x^n$ untuk setiap $n \in \mathbb{Z}^+$. Sebagai contoh, pertumbuhan 10^x lebih cepat dari $f_{100}(x) = x^{100}$. Misal diberikan nilai x yang cukup besar seperti $x = 10^5$, catat bahwa $f_{100}(10^5) = (10^5)^{100} = 10^{500}$, sedangkan $f(10^5) = 10^{10^5} = 10^{100.000}$. Jelas bahwa f yang pertumbuhannya lebih cepat dari $f_{100}(x)$, dan hal tersebut tidaklah sulit untuk dibuktikan.

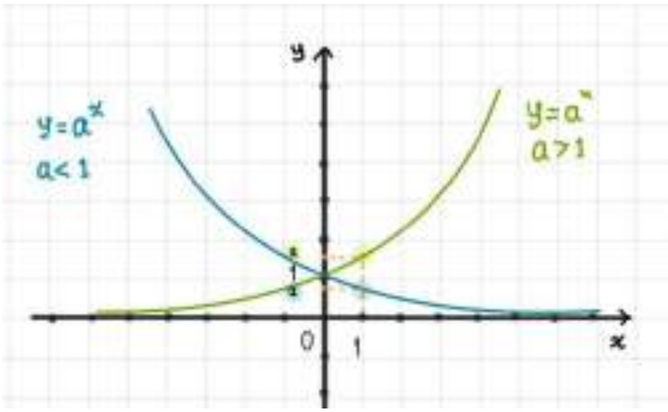
Definisi 5.1 (NCERT, 2006) *Fungsi eksponensial umum merupakan fungsi yang didefinisikan sebagai $y = a^x$, dengan basis $a > 1$.*

Selanjutnya kita akan bahas tentang sifat-sifat yang dimiliki oleh fungsi eksponensial, di antaranya sebagai berikut:

1. Memiliki domain $\mathbb{R}$, atau semua bilangan real
2. Memiliki range $\mathbb{R}^+$, atau semua bilangan real yang positif

3. Fungsi eksponensial selalu naik, yakni bergerak dari kiri ke kanan dan kurvanya bertambah ke atas.
4. Untuk setiap bilangan yang sangat besar yang negatif, fungsi eksponensial sangan dekat dengan 0, tetapi tidak akan pernah menyentuh 0 terlebih memotong 0.

Grafik dari fungsi $y = a^x$, dapat dilihat pada Gambar 5.2, juga untuk $a < 1$, maka $y = a^x$ merupakan fungsi turun.



Gambar 5.2 Grafik Fungsi $y = a^x$, dengan $a > 1$ dan $a < 1$

(Sumber: Dokumentasi Penulis)

Dalam {indiax1}, dijelaskan bahwa jumlahan dari deret

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

merupakan suatu bilangan antara 2 dan 3 dan dinotasikan dengan e. Ketahuilah bahwa bilangan e adalah bilangan penting dan spesial seperti π, yakni merupakan bilangan irasional. Bentuk desimalnya merupakan decimal tidak berulang dan takterbatas. Berikut beberapa digit pertamanya

$$2{,}71828182 \ldots$$

Nilai tersebut diperoleh dari aproksimasi limit pada Teorema 5.2 berikut.

Teorema 5.2 (Simmons, 1996) *Bilangan e dapat dihitung sebagai limit*

$$e = \lim_{x \to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}}.$$

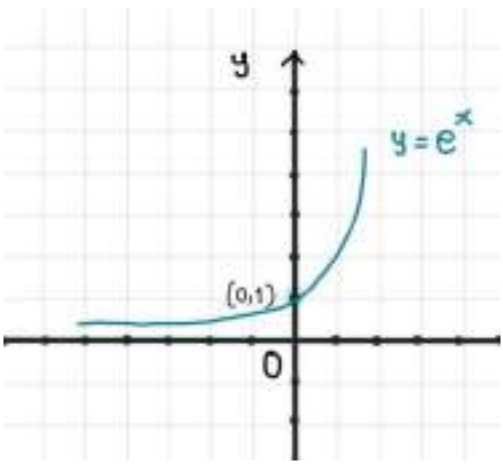
Dengan menggunakan *e* sebagai basis, kita dapatkan fungsi eksponensial natural berikut. Kita juga bisa melihat grafik fungsi ini pada Gambar 5.3

Definisi 5.3 (NCERT, 2006) *Fungsi eksponensial natural dinotasikan oleh e dan didefinisikan dengan*

$$y = e^x.$$

Fungsi eksponensial memiliki grafik yang cekung ke atas. Berdasarkan Gambar 5.3, kita dapat memperoleh

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \quad \text{dan} \quad \lim_{x \to \infty} e^x = \infty.$$



Gambar 5.3 Grafik Fungsi Eksponensial

(Sumber: Penulis, 2023)

Teorema 5.4 (Thomas et al., 2017)*Untuk setiap bilangan x, y, eksponensial natural memiliki sifat-sifat sebagai berikut:*

1. $e^x e^y = e^{x+y}$
2. $e^{\frac{x}{y}} = e^{x-y}$
3. $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
4. $(e^x)^r = e^{xr}, \ r \in \mathbb{Q}$

5.3. Fungsi Logaritma dan Grafiknya

Secara umum, properti dari fungsi eksponensial dari subbab 5.1 menunjukkan bahwa jika a adalah bilangan konstan $\neq 1$, maka tidak sulit untuk untuk mendapatkan nilai $x > 0$ yang berkorespondensi satu ke satu dengan y, yang mengakibatkan fungsi eksponensial memiliki invers. Kita dapat definisikan invers tersebut sebagai logaritma x dengan basis a dan dinotasikan dengan $\log_{\mathrm{a}} x$, grafiknya dapat dilihat pada Gambar 5.vghf

Definisi 5.5 (Thomas et al., 2017)*Untuk setiap bilangan positif $a \neq 1$, $\log_{\mathrm{a}} x$ adalah invers fungsi dari a^x, dan disebut logaritma umum, ditulis sebagai*

$$y = \log_{\mathrm{a}} x.$$

Kita tahu bahwa $2^3 = 8$, dalam logaritma kita dapat menuliskannya menjadi $\log_2 8 = 3$. Begitu juga untuk $10^3 = 1000$, yang ekivalen dengan $\log_{10} 1000 = 3$. Beberapa sumber menuliskan $\log x$ untuk fungsi $\log_{10} x$, dengan $a = 10$ dan disebut logaritma biasa. Catat bahwa fungsi $\log_{\mathrm{a}} x$ dan a^x saling invers, maka kita bisa memperoleh fungsi identitas:

$$a^{\log_{\mathrm{a}} x} = x \ \ untuk \ \ x > 0$$

$$\log_{\mathrm{a}} a^x = x \ \ untuk \ semua \ x$$

Teorema 5.6 (Thomas et al., 2017) *Aturan logaritma dengan basis a, dengan $\forall x, y > 0$, memenuhi*

1. *Aturan hasilkali*

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

2. *Aturan hasilbagi*

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

3. *Aturan kebalikan*

$$\log_a \frac{1}{y} = -\log_a y$$

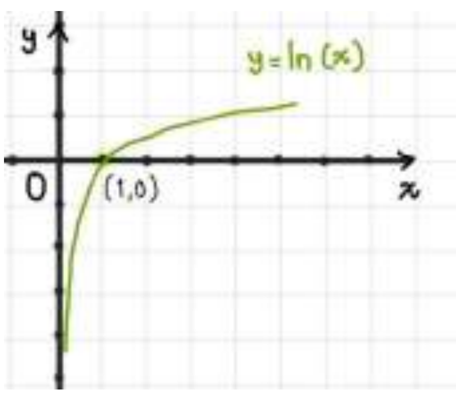
4. *Aturan pangkat*

$$\log_a x^y = y \log_a x$$

Logaritma memiliki manfaat yang sangat penting dalam suatu perhitungan. Khususnya dalam aritmatika, di bidang navigasi lepas pantai dan mekanika benda langit. Selanjutnya, kita akan mendefinisikan logaritma natural sebagai suatu integral (Thomas et al., 2017).

Definisi 5.7 (Simmons, 1996)*Logaritma natural merupakan suatu fungsi yang didefinisikan sebagai*

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt, \qquad x > 0.$$



Gambar 5.4 Grafik Fungsi ln x

(Sumber: Penulis, 2023)

Proposisi 5.8 (Thomas et al., 2017)*Sifat-sifat aljabar logaritma natural. Untuk setiap bilangan* $x, y > 0$*, logaritma natural memiliki sifat-sifat sebagai berikut:*

1. *Aturan hasilkali*

$$\ln xy = \ln x + \ln y$$

2. *Aturan hasilbagi*

$$\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$$

3. *Aturan kebalikan*

$$\ln \frac{1}{y} = -\ln y$$

4. *Aturan pangkat*

$$\ln x^r = r \ln x, \qquad r \in \mathbb{Q}$$

Adanya fungsi $\ln x$ memberikan jawaban atas permasalahan integral jika fungsi yang diberikan merupakan x^{-1}, yakni dituangkan dalam teorema berikut.

Teorema 5.9 (Thomas et al., 2017) *Turunan dari* $\ln|x|$ *adalah* $\frac{1}{x}$*, atau dapat ditulis*

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$$

Kelak pada bab berikutnya akan dibahas mengenai turunan secara mendalam dan kita bisa mencari turunan dari fungsi logaritma yang lebih kompleks dengan menggunakan aturan rantai. Selanjutnya kita akan membahas fungsi trigonometri beserta inversnya (fungsi siklometri).

5.4. Fungsi Trigonometri dan Grafiknya

Subbab ini membahas tentang fungsi trigonometri. Namun sebelum itu akan diberikan penjelasan tentang pengetahuan dasar yang perlu diperkenalkan agar kita lebih mudah memahami tentang fungsi trigonometri kelak.

Kata *Trigonometry* berasal dari Bahasa Yunani yaitu *'trigon'* dan *'metron'* yang memiliki arti mengukur sisi-sisi dari segitiga. Sudut adalah besarnya rotasi garis putar yang berhubungan dengan garis tetap. Sudut dapat diukur dengan menggunakan 2 cara yang berbeda, yaitu (NCERT, 2006):

1. Sistem sexagesimal, yang memiliki satuan derajat.
   $\frac{1}{360}$ putaran = 1°
2. Sistem sirkular, yang memiliki satuan radian.
   Bilangan radian pada pada sudut pusat A'CB' dalam lingkaran dengan radius r didefinisikan sebagai bilangan dari radius satuan yang termuat dalam busur s di depan sudut pusat (θ), maka (Thomas et al., 2017)

$$\theta = \frac{s}{r} \iff s = r\theta$$

Catat bahwa 1 putaran penuh dari suatu lingkaran satuan adalah 360° atau 2π radian, maka π radian $= 180°$ (Simmons, 1996).

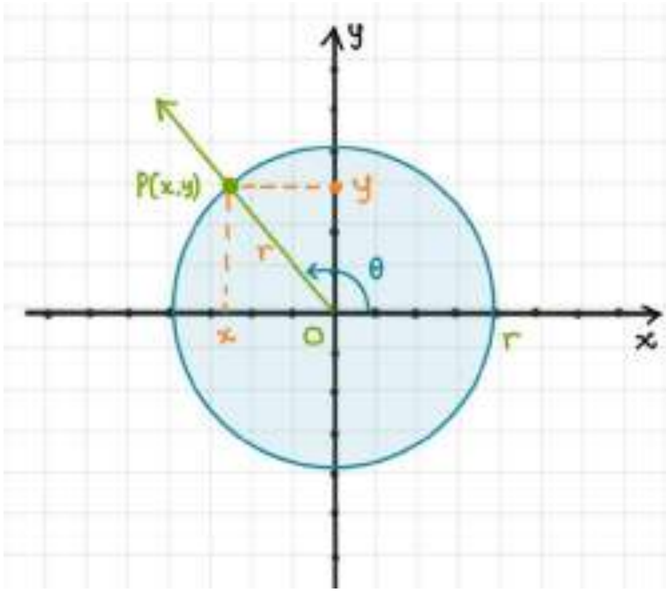
Tabel 5.1 Sudut dalam derajat dan radian

Derajat	0	30	45	60	90	180	360
Radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

(Sumber: Penulis, 2023)

5.4.1. Fungsi Dasar Trigonometri

Kita sudah tidak asing lagi dengan pendefinisian fungsi trigonometri untuk sudut lancip dengan segitiga siku-siku seperti Gambar 5.5



Gambar 5.5 Fungsi Trigonometri dari θ dalam x,y dan r

(Sumber: Penulis, 2023)

Berdasarkan Gambar 5.5 dapat diperoleh:

$$\sin\ (\theta) = \frac{y}{r} \qquad \csc\ (\theta) = \frac{r}{y}$$

$$\cos\ (\theta) = \frac{x}{r} \qquad \sec\ (\theta) = \frac{r}{x}$$

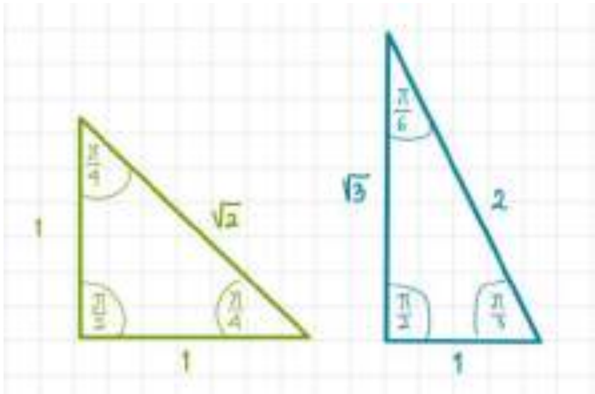
$$\tan\ (\theta) = \frac{y}{x} \qquad \cot\ (\theta) = \frac{x}{y}$$

Catat juga bahwa pendefinisian di atas dapat dinyatatakan sebagai

$$\tan\ (\theta) = \frac{\sin\ (\theta)}{\cos\ (\theta)} \qquad \cot\ (\theta) = \frac{1}{\tan\ (\theta)}$$

$$\sec\ (\theta) = \frac{1}{\cos\ (\theta)} \qquad \csc\ (\theta) = \frac{1}{\sin\ (\theta)}$$

Kemudian secara eksak, rasio trigonometri untuk beberapa sudut dapat dibaca dari segitiga pada Gambar 5.6



Gambar 5.6 Sudut Radian dan Panjang Sisi Segitiga Siku-siku

(Sumber: Penulis, 2023)

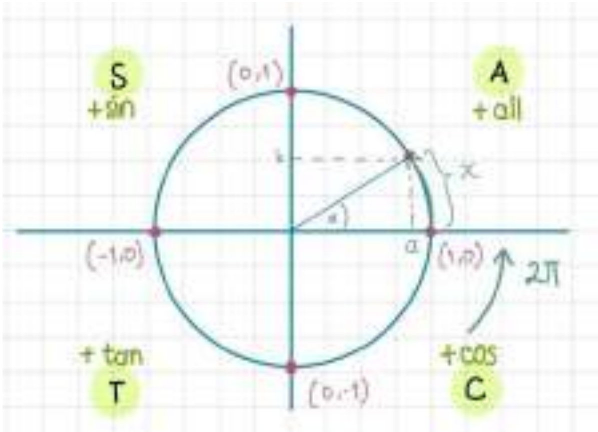
penjelasan singkatnya sebagai berikut (Simmons, 1996):

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \qquad \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \qquad \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$$

Sedangkan untuk melihat kapan suatu fungsi trigonometri bernilai positif atau negatif, kita dapat menggunakan bantuan Aturan CAST seperti pada Gambar 5.7



Gambar 5.7 Aturan CAST

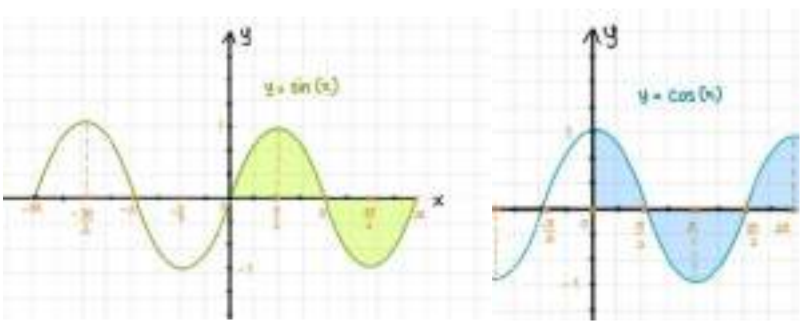
(Sumber: Penulis, 2023)

5.4.2. Grafik Fungsi Trigonometri

Jika kita amati, dua sudut memiliki nilai fungsi trigonometri yang sama, sebagai contoh:

$$\sin\ (\theta) = \sin\ (\theta + 2\pi)\ \text{ dan }\ \cos\ (\theta) = \ \cos\ (\theta - 2\pi)$$

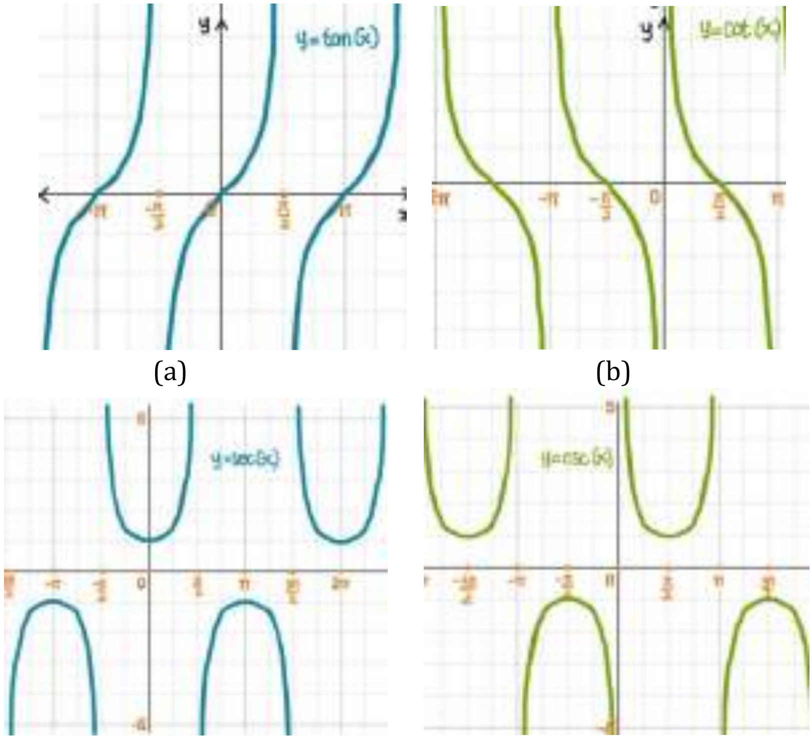
Kondisi pengulangan tersebut dapat kita katakan bahwa fungsi trigonometri dasar merupakan fungsi periodik. Selanjutnya, kita akan menggambar fungsi trigonometri di bidang koordinat. Kali ini kita akan menyatakan θ dengan x.



Gambar 5.8 Grafik Fungsi Sin dan Cos

(Sumber: Penulis, 2023)

Selanjutnya, Gambar 5.9 merupakan grafik fungsi tan, cot, sec, dan csc.



(a) (b)

(c) (d)

Gambar 5.9 Grafik Fungsi: (a) tan(x), (b) cot (x), (c) sec(x), (d) csc(x)

(Sumber: Penulis, 2023)

5.4.3. Identitas Trigonometri

Sudut yang terdiri dari jumlahan atau selisih dua atau lebih disebut sudut majemuk. Hal dasar ini menghasilkan identitas trigonometri seperti yang diberikan oleh Teorema 5.10.

Teorema 5.10 (NCERT, 2006)Berikut ini beberapa formula untuk fungsi trigonometri

a. Identitas Dasar

$\cos^2 (\theta) + \sin^2 (\theta) = 1$

$$1+\tan^2\ (\theta) = \sec^2\ (\theta)$$
$$1+\cot^2\ (\theta) = \csc^2\ (\theta)$$

b. Penjumlahan
$$\cos\ (A+B) = \cos\ (A)\cos\ (B) - \sin\ (A)\sin\ (B)$$
$$\sin\ (A+B) = \sin\ (A)\cos\ (B) + \cos\ (A)\sin\ (B)$$
c. Sudut ganda
$$\cos\ (2\theta) = \cos^2\ (\theta) - \sin^2\ (\theta)$$
$$\sin\ (2\theta) = 2\sin\ (\theta)\cos\ (\theta)$$
d. Setengah sudut
$$\cos^2\ (\theta) = \frac{1+\cos\ (2\theta)}{2}$$
$$\sin^2\ (\theta) = \frac{1-\cos\ (2\theta)}{2}$$
e. Hukum cos
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\ (\theta)$$

5.5. Fungsi Siklometri dan Grafiknya

Kita telah mempelajari fungsi dasar trigonometri pada sebbab sebelumnya. Kita lihat bahwa fungsi-fungsi tersebut bukan fungsi satu ke satu, namun kita bisa buat demikian apabila kita membatasi domain dari keenam fungsi dasar trigonometri tersebut, yang disajikan dalam Tabel 5.2.

Tabel 5.2 Pembatasan Domain Fungsi Trigonometri

Fungsi Trigonometri	Domain	Codomain
$y = \sin\ (x)$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$[-1,1]$
$y = \cos\ (x)$	$[0, \pi]$	$[-1,1]$
$y = \tan\ (x)$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$(-\infty, \infty)$
$y = \csc\ (x)$	$\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

Fungsi Trigonometri	Domain	Codomain
$y = \sec(x)$	$\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
$y = \cot(x)$	$(0, \pi)$	$(-\infty, \infty)$

(Sumber: Penulis, 2023)

Alasan perlunya pembatasan domain fungsi trigonometri adalah untuk melengkapi syarat agar suatu fungsi bisa memiliki invers. Dengan demikian, keenam fungsi dasar trigonometri memiliki invers atau disebut sebagai fungsi siklometri yakni:

$\sin^{-1}(x) = \arcsin(x)$ $\qquad$ $\csc^{-1}(x) = \text{arccsc}(x)$

$\cos^{-1}(x) = \arccos(x)$ $\qquad$ $\sec^{-1}(x) = \text{arcsec}(x)$

$\tan^{-1}(x) = \arctan(x)$ $\qquad$ $\cot^{-1}(x) = \text{arccot}(x)$

Catat bahwa notasi pangkat -1 adalah untuk menyatakan invers, bukan kebalikan seperti $(\cos(x))^{-1} = \frac{1}{\cos(x)}$.

5.5.1. Fungsi Siklometri untuk Sin dan Cos (Arcsin dan Arccos)

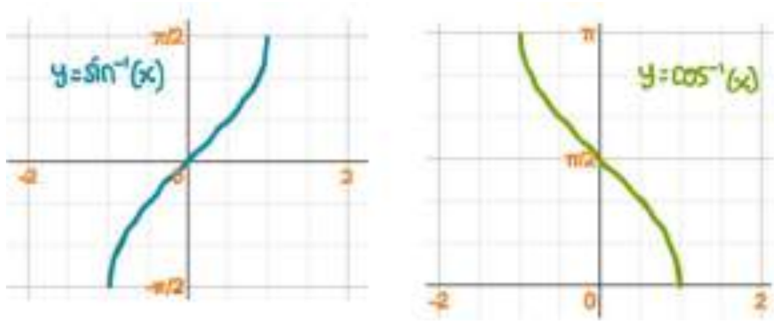
Fungsi arcsin dibaca arkus sin dan arccos dibaca arkus cos, didefinisikan sebagi fungsi yang memiliki nilai berupa sudut yang ada pada domain fungsi sin dan cos yang telah kita batasi pada Tabel 5.2.

Definisi 5.11 *Nilai fungsi siklometri untuk* sin *dan* cos (arcsin *dan* arccos) *didefinisikan sebagai*

$y = \sin^{-1}(x)$ *adalah bilangan pada* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *dengan* $x = \sin(y)$

$y = \cos^{-1}(x)$ *adalah bilangan pada* $[0, \pi]$ *dengan* $x = \cos(y)$

Grafik untuk fungsi siklometri sin dan cos dapat kita lihat pada Gambar 5.10



Gambar 5.10 Grafik Fungsi Siklometri Sin dan Cos

(Sumber: Pribadi, 2023)

5.5.2. Fungsi Siklometri untuk Tan, Cot, Sec, dan Csc

Sama halnya seperti fungsi siklometri untuk sin dan cos, fungsi siklometri tan, cot, sec, dan csc juga memiliki nilai berupa sudut (dalam radian) yang ada pada domain masing fungsi sebagai berikut.

Definisi 5.12 (Thomas et al., 2017)*Nilai fungsi siklometri untuk* tan, cot, sec, *dan* csc *didefinisikan sebagai*

$y = \tan^{-1}(x)$ *adalah bilangan pada* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *dengan* $x = \tan\ (y)$

$y = \cot^{-1}(x)$ *adalah bilangan pada* $(0, \pi)$ *dengan* $x = \cot\ (y)$

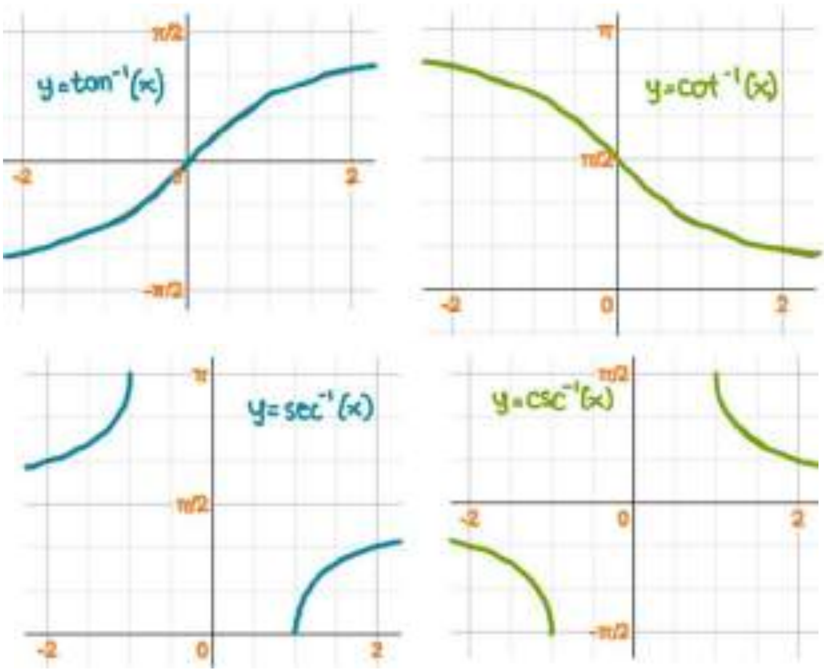
$y = \sec^{-1}(x)$ *adalah bilangan pada* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

dengan $x = \sec\ (y)$

$y = \csc^{-1}\ (x)$ *adalah bilangan pada* $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$

dengan $x = \csc\ (y)$

Grafik untuk fungsi siklometri tan, cot, sec, dan csc dapat kita lihat pada Gambar 5.8



Gambar 5.11 Grafik Fungsi Siklometri Tan, Cot, Sec, dan Csc

(Sumber: Pribadi, 2023)

Teorema 5.13(Thomas et al., 2017) *Identitas fungsi siklometri*

a. $\cos^{-1}(x) + \cos^{-1}(-x) = \pi$

b. $\sin^{-1}(x) + \cos^{-1}(x) = \frac{\pi}{2}$

c. $\cot^{-1}(x) + \tan^{-1}(x) = \frac{\pi}{2}$

d. $\csc^{-1}(x) + \sec^{-1}(x) = \frac{\pi}{2}$

Fungsi transenden yang kita bahas pada bab ini memiliki manfaat yang sangat besar dan saling berkaitan satu sama lain. Fungsi siklometri bisa memberikan kemudahan dalam pencarian turunan dan antiturunan yang muncul dalam pencarian solusi dari persamaan diferensial. Namun, pada bab ini tidak mengkaji detail proses pencariannya.

DAFTAR PUSTAKA

NCERT. (2006). *Mathematics : Textbook for class XII 2 Part*. National Council of Education Research and Training.

Simmons, G. F. (1996). *Calculus with Analytic Geometry* (J. Shira, M. Lanzillo, & T. McConnel, Eds.; 2nd ed.). McGraw-Hill Companies.

Thomas, G. B., Weir, M. D., Hass, J., & Heil, C. (2017). *Kalkulus Thomas. Terjemahan: Idha Sihwaningrum, Rina Reorita, Mutia N Esti* (13th ed., Vol. 1). Erlangga.

BAB 6

INTUISI LIMIT

Oleh Enos Lolang, S.Si., M.Pd.

6.1. Pendahuluan

6.1.1. Definisi Intuisi Limit

Suatu fungsi yang dinyatakan dengan $g(t) = \frac{4(t^4-4)}{t-2}$ menyatakan kecepatan rata-rata sesuai Persamaan (2). Misalkan kita ingin mengetahui $g(t)$ menghampiri nilai tertentu pada saat t menghampiri 2. Jika diambil barisan bilangan nilai-nilai t menghampiri 2 dari kanan $(t > 2)$, terlihat bahwa ternyata $g(t)$ menghampiri 16. Demikian juga jika dipilih barisan nilai-nilai t yang menghampiri 2 dari kiri $(t < 2)$, maka akan diperoleh nilai-nilai seperti diperlihatkan pada Tabel 6.1.

Tabel 6.1 Kecepatan rata-rata untuk t menghampiri 2 dari kiri

t	1,5	1,9	1,99	1,999	1,9999
$g(t)$	14	15,6	15,96	15,996	15,9996

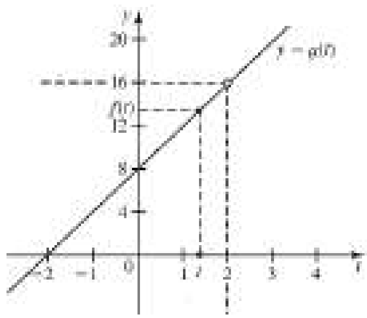
(Sumber: Penulis, 2023)

Terlihat pada Tabel 6.1 bahwa $g(t)$ menghampiri 16 pada saat t menghampiri 2 dari kanan maupun kiri. Pada situasi seperti ini dikatakan bahwa untuk t menghampiri 2, limit $g(t)$ adalah 16 dan dituliskan

$$\lim_{t \to 2} g(t) = \lim_{t \to 2} \frac{4(t^2 - 4)}{t - 2} = 16$$

Grafik fungsi g yang pada Gambar 1 mengkonfirmasi hal ini.

Perhatikan bahwa angka 2 tidak terletak di dalam domain g. Karena itu $(2, 16)$ tidak ada dalam grafik g yang digambarkan dengan lingkaran terbuka pada grafik. Perhatikan juga bahwa ada atau tidak adanya $g(t)$ pada titik $t = 2$ tidak mempengaruhi apapun dalam perhitungan limit yang kita lakukan.



Gambar 6.1 Jika t Menghampiri 2, Maka *g(t)* Menghampiri 16.

(Sumber: Penulis, 2023)

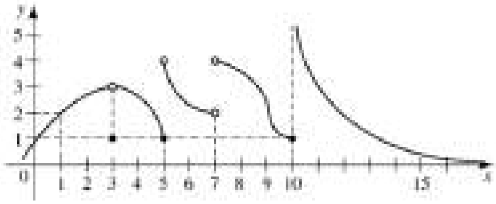
Definisi 1. Limit Fungsi pada Suatu Bilangan

Jika f adalah fungsi yang terdefinisi dalam suatu interval terbuka yang meliputi a tetapi mungkin tidak termasuk a itu sendiri, maka limit $f(x)$ ketika x menghampiri nilai a sama dengan L,

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \tag{1}$$

jika $f(x)$ dapat dibuat sedekat mungkin dengan L dengan memilih x sedekat mungkin dengan a.

Contoh 1. Gunakan grafik fungsi f yang ditunjukkan pada Gambar 2 untuk mencari limit yang ditanyakan, jika limit tersebut ada.



Gambar 6.2 Grafik fungsi f

(Sumber: Tan, 2010)

a) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ c) $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$

d) $\lim\limits_{x \to 7} f(x)$ e) $\lim\limits_{x \to 10} f(x)$

Jawab

a) Nilai f dapat dibuat sedekat mungkin dengan 2 jika dipilih x menghampiri 1. Jadi $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$.

b) Nilai f dapat dibuat sedekat mungkin dengan 3 jika dipilih x menghampiri 3. Jadi $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 3$. Perhatikan bahwa $f(3) = 1$ tetapi nilai ini tidak ada termasuk dalam grafik fungsi.

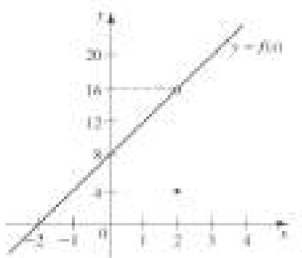
c) Bagaimanapun x menghampiri 5, ada nilai-nilai yang f menghampiri 1 (jika $x < 5$) dan ada nilai f yang menghampiri 4 (jika $x > 5$). Dengan kata lain tidak ada nilai tunggal dari $f(x)$ untuk x menghampiri 5. Karena itu $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$ tidak ada. Perhatikan bahwa $f(5) = 1$. Tetapi hal ini tidak ada hubungan dengan ada atau tidak adanya limit $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$.

d) Bagaimanapun x menghampiri 7, ada nilai f yang menghampiri 2 (pada saat $x < 7$) dan ada pula nilai f yang menghampiri 4 (pada saat $x > 7$). Jadi dalam hal ini, $\lim\limits_{x \to 7} f(x)$ tidak ada. Dapat dilihat bahwa $x = 7$ tidak terdapat dalam domain f tetapi masalah ini tidak mempengaruhi jawaban yang diperoleh.

e) Pada saat x menghampiri 10 dari sisi kanan, $f(x)$ meningkat tanpa batas. Karena itu $f(x)$ tidak dapat menghampiri nilai tertentu untuk x menghampiri 10, dan $\lim_{x \to 10} f(x)$ tidak ada. Dapat dilihat bahwa $f(10) = 1$, tetapi fakta ini tidak mempengaruhi nilai limit.

Contoh 2. Hitunglah $\lim_{x \to 2} f(x)$ jika limit tersebut ada, dimana f adalah fungsi yang didefinisikan:

$$f(x) = \begin{cases} 4x + 8 & \text{jika } x \neq 2 \\ 4 & \text{jika } x = 2 \end{cases}$$



Gambar 6.3 Grafik fungsi *f* berimpit dengan fungsi *g*, kecuali pada titik x = 2.
(Sumber: Penulis, 2023)

Jawab

Berdasarkan grafik fungsi f pada Gambar.6.3, dapat dilihat bahwa $\lim_{x \to 2} f(x) = 16$. Jika fungsi f dibandingkan dengan fungsi g (Gambar. 6.1 dan Gambar. 6.3) jelas bahwa kedua fungsi memiliki nilai yang sama kecuali pada titik $x = 2$. Artinya, $\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} g(x)$. Kedua grafik fungsi ini bernilai sama di semua titik kecuali di $x = 2$ dapat dipahami karena:

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{4(x^2 - 4)}{x - 2} \\ &= \frac{4(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = 4(x + 2) \end{aligned}$$

dengan asumsi $x \neq 2$ yang ekivalen dengan ketentuan definisi f untuk $x \neq 2$.

6.1.2. Definisi Formal Limit

Asumsikan fungsi f terdefinisi untuk semua x di sekitar a, kecuali mungkin pada titik a itu sendiri. Perhatikan bahwa $\lim_{x \to a} f(x) = L$ berarti $f(x)$ cukup dekat dengan L untuk semua x yang cukup dekat tetapi tidak sama dengan a. Menurut definisi ini jarak $f(x)$ dengan L adalah $|f(x) - L|$ dan jarak x dengan a adalah $|x - a|$. Jadi $\lim_{x \to a} f(x) = L$ jika $|f(x) - L|$ dapat dibuat cukup kecil untuk sembarang $x \neq a$, dengan $|x - a|$ cukup kecil.

Sebagai contoh, jika diinginkan $|f(x) - L|$ lebih kecil dari 0,1 maka harus ditentukan suatu bilangan $\delta > 0$ sedemikian sehingga $|f(x) - L| < 0{,}1$ untuk $|x - a| < \delta$ dan $x \neq a$. Atau jika diinginkan $f(x)$ lebih kecil dari 0,001, maka harus ditemukan bilangan $\delta > 0$ yang lain sehingga $|f(x) - L| < 0{,}001$ untuk $0 < |x - a| < \delta$. Agar limit yang dimaksud ada, maka untuk sembarang $\varepsilon > 0$, selalu dapat ditemukan $\delta > 0$ sehingga $|f(x) - L| < \varepsilon$ untuk $0 < |x - a| < \delta$.

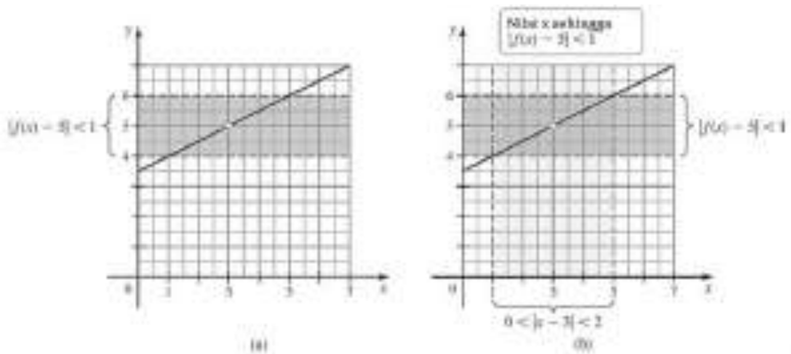
Contoh 3. Menetukan nilai-nilai δ dari grafik. Gambar 6.4 memperlihatkan grafik suatu fungsi linier f dengan $\lim_{x \to 3} f(x) = 5$. Untuk setiap nilai $\varepsilon > 0$, tentukanlah nilai $\delta > 0$ yang memenuhi $|f(x) - 5| < \varepsilon$ jika $0 < |x - 3| < \delta$.

a. $\varepsilon = 1$ b. $\varepsilon = \frac{1}{2}$

Jawab.

a. Untuk $\varepsilon = 1$, diperlukan $|f(x) - 5| < 1$, yang berarti $f(x)$ terletak di antara 4 dan 6. Untuk menentukan nilai δ yang sesuai, kita menggambarkan garis horisontal $y = 4$ dan $y = 6$ (Gambar 6.4a). Kemudian kita menggambar garis vertikal yang melalui titik-titik perpotongan antara garis horisongtal dengan grafik fungsi f (Gambar 6.4b). Dapat dilihat bahwa garis-garis vertikal memotong sumbu x di titik $x = 1$ dan

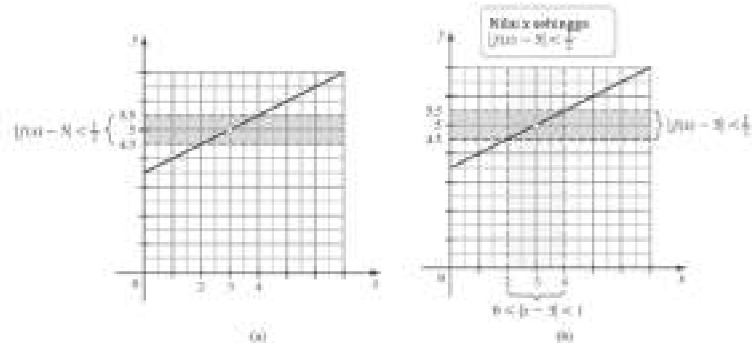
$x = 5$. Perhatikan bahwa $|f(x) - 5| < 1$ pada sumbu y jika x berada di antara $0 < |x - 3| < 2$ pada sumbu x. Jadi untuk $\varepsilon = 1$, kita dapat memilih $\delta = 2$ atau sembarang bilangan positif lainnya yang lebih kecil.



Gambar . 6.4 $\boldsymbol{\lim_{x \to 3} f(x) = 5}$.

(Sumber: Briggs, et al, 2019)

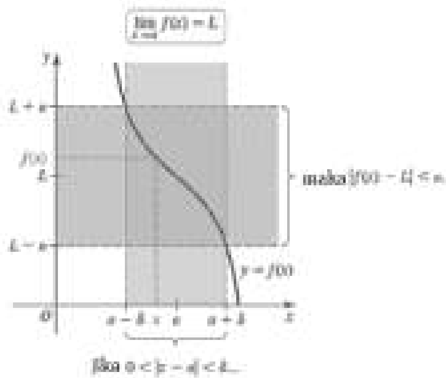
b. Untuk $\varepsilon = \frac{1}{2}$, kita menginginkan $|f(x) - 5| < \frac{1}{2}$, dengan kata lain $f(x)$ berada di antara 4,5 dan 5,5. Sebagaimana halnya dengan (a), dapat dilihat bahwa $|f(x) - 5| < \frac{1}{2}$ pada sumby y (Gambar 5a) jika $x < |x - 3| < \frac{1}{2}$ (Gambar 5b). Jadi untuk $\varepsilon = \frac{1}{2}$, dapat dipilih $\delta = 1$ atau sembarang bilangan positif lainnya yang lebih kecil.



Gambar. 6.5 Grafik fungsi $|\boldsymbol{f(x) - 5}| < \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

(Sumber: Briggs, Cochran, Gillet, et al., 2019)

Gambar 6.5 memperlihatkan fungsi linier, tetapi dapat digunakan untuk menjelaskan definisi formal limit dari suatu fungsi. Secara umum $\lim_{x \to a} f(x) = L$ berarti bahwa untuk sembarang bilangan ε positif, terdapat bilangan positif lainnya, yaitu δ, sehingga $|f(x) - L| < \varepsilon$ jika $0 < |x - a| < \delta$. Tujuan semua pembuktian limit adalah menemukan hubungan antara ε dan δ. Hubungan ini berlaku untuk semua nilai ε positif.



Gambar. 6.6 Jika $\mathbf{0} < |\boldsymbol{x - a}| < \boldsymbol{\delta}$ maka $|\boldsymbol{f(x) - L}| < \boldsymbol{\varepsilon}$

(Sumber: Briggs, Cochran, Gillet, et al., 2019)

Definisi 2. Asumsikan $f(x)$ terdefinisi untuk semua x dalam suatu interval terbuka yang meliputi a, kecuali mungkin pada nilai a itu sendiri. Limit dari $f(x)$ ketika x menghampiri a adalah L, dan dituliskan

$$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$

jika untuk sembarang bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ yang sesuai, sehingga $|f(x) - L| < \varepsilon$ jika $0 < |x - a| < \delta$ (Tan, 2010; Guichard, 2017; Adams and Essex, 2018; Briggs *et al.*, 2019; Hass *et al.*, 2020; Stewart, Clegg and Watson, 2021).

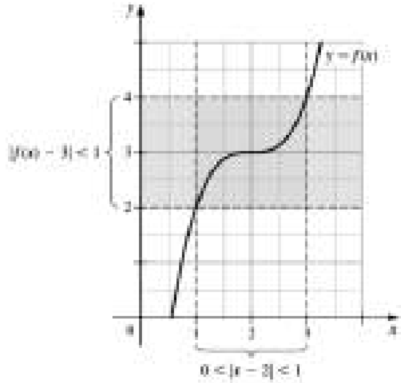
Contoh 4. Mencari δ jika nilai ε diketahui dengan menggunakan grafik.

Misalkan $f(x) = x^3 - 6x^2 - 5$, tunjukkan bahwa $\lim_{x \to 2} f(x) = 3$ untuk nilai ε yang diberikan. Gunakan grafik fungsi untuk mencari nilai $\delta > 0$ sehingga $|f(x) - 3| < \varepsilon$ jika $0 < |x - 2| < \delta$.

a. $\varepsilon = 1$ b. $\varepsilon = \frac{1}{2}$

Jawab

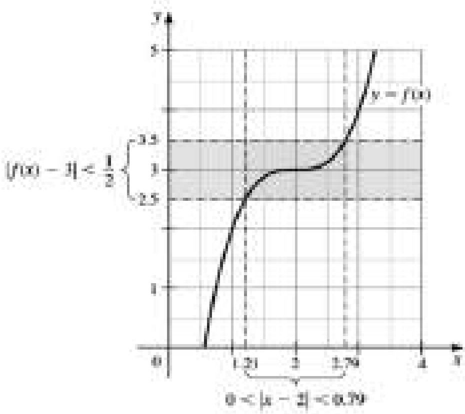
a. Syarat $|f(x) - 3| < \varepsilon = 1$ mengimplikasikan bahwa $f(x)$ terletak di antara 2 dan 4. Dengan menggunakan grafik, dapat dilukiskan garis $y = 2$ dan $y = 4$ (Gambar 7). Garis-garis ini memotong grafik fungsi f di titik $x = 1$ dan $x = 3$. Dengan menggambarkan garis-garis vertikal pada $x = 1$ dan $x = 3$, dapat dilihat bahwa fungsi $|f(x) - 3| < 1$ jika $0 < |x - 2| < 1$ pada sumbu x (Gambar 7). Jadi, dengan $\varepsilon = 1$, dapat diplih sembarang δ dengan $0 < \delta \leq 1$.



Gambar. 6.7 $|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \mathbf{3}| < \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{1}$

(Sumber: Briggs et al., 2019)

b. Syarat $|f(x) - 3| < \varepsilon = \frac{1}{2}$ menyatakan bahwa $f(x)$ terletak di antara 2,5 dan 3,5 pada sumbu y. Dapat dilihat bahwa garis-garis mendatar $y = 2{,}5$ dan $y = 3{,}5$ memotong grafik fungsi f pada titik $x \approx 1{,}21$ dan $x \approx 2{,}79$ (Gambar 8). Jika $0 < |x - 2| < 0{,}79$ pada sumbu x, maka $|f(x) - 3| < \frac{1}{2}$ pada sumbu y. Karena itu, dengan $\varepsilon = \frac{1}{2}$ dapat dipilih sembarang δ dalam domain $0 < \delta \leq 0{,}79$.



Gambar. 6.8 $|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \mathbf{3}| < \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

(Sumber: Briggs et al., 2019)

Langkah ini dapat diulangi untuk nilai $\varepsilon > 0$ yang lebih kecil lagi. Untuk setiap nilai ε, terdapat nilai δ yang sesuai, menunjukkan bahwa limit tersebut ada.

6.2. Teorema-Teorema Limit

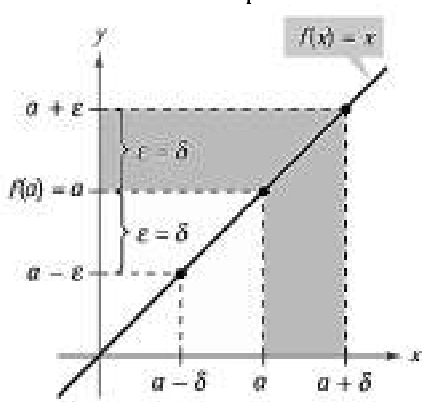
Limit bersifat unik. Jika $\lim_{x \to a} f(x) = L$ dan $\lim_{x \to a} f(x) = M$ maka $L = M$ (Salas, Hille and Etgen, 2007; Adams and Essex, 2018). Meskipun fungsi f hanya memiliki satu nilai limit pada satu titik tertentu, beberapa fungsi memiliki nilai limit yang berbeda pada titik tertentu juga.

Teorema 1. Limit Dasar

Misalkan a dan k adalah bilangan-bilangan real dan n adalah bilangan bulat positif.

1. $\lim_{x \to a} k = k$
2. $\lim_{x \to a} x = a$
3. $\lim_{x \to a} x^n = a^n$

Bukti.
Pembuktian Sifat 2 dalam Teorema 1, harus ditunjukkan bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga $|x - a| < \varepsilon$ jika $0 < |x - a| < \delta$ (Gambar 9). Untuk itu, dipilih $\delta = \varepsilon$. Ketidaksamaan kedua menyatakan ketidaksamaan pertama.



Gambar. 6.9 $|x - a| < \varepsilon$ jika $0 < |x - a| < \delta$

(Sumber: Briggs, Cochran, Gillett, et al., 2019)

Teorema 2. Sifat-Sifat Limit

Misalkan a dan k adalah bilangan-bilangan real, n adalah bilangan bulat positif, serta f dan g masing-masing adalah fungsi-fungsi dengan limit di bawah ini (Larson and Edwards, 2012):

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \text{ dan } \lim_{x \to a} g(x) = K$$

Maka:

1. Perkalian skalar $\lim_{x \to a}[kf(x)] = kL$
2. Jumlah atau selisih $\lim_{x \to a}[f(x) \pm g(x)] = L \pm K$
3. Perkalian $\lim_{x \to a}[f(x)g(x)] = LK$
4. Pembagian $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{K}; \ K \neq 0$
5. Pangkat $\lim_{x \to a}[f(x)]^n = L^n$

Contoh 5. Limit Polinomial. Carilah $\lim_{x \to 2}(4x^2 + 3)$

Jawab

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 2}(4x^2 + 3) &= \lim_{x \to 2} 4x^2 + \lim_{x \to 2} 3 && \text{(Sifat 2)} \\
&= 4\left(\lim_{x \to 2} x^2\right) + \lim_{x \to 2} 3 && \text{(Sifat 1)} \\
&= 4(2^2) + 3 && \text{(Teorema 1)} \\
&= 19 && \text{(Penyederhanaan)}
\end{aligned}$$

Pada Contoh 5, limit $x \to 2$ dari fungsi polinomial $p(x) = 4x^2 + 3$ menyatakan nilai p pada titik $x = 2$.

$$\lim_{x \to 2} p(x) = p(2) = 4(2^2) + 3 = 19$$

Sifat subtitusi langsung seperti ini berlaku untuk semua fungsi polinomial dan fungsi rasional yang bilangan pembaginya tidak sama dengan nol.

Teorema 3. Limit Fungsi Polinomial dan Rasional

Jika p adalah suatu fungsi polinomial dan a adalah bilangan real, maka

$$\lim_{x \to a} p(x) = p(a)$$

Jika r adalah suatu fungsi rasional yang dinyatakan dengan $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ dan a adalah suatu bilangan real sedemikian sehingga $q(a) \neq 0$, maka

$$\lim_{x \to a} r(x) = r(a) = \frac{p(a)}{q(a)}$$

Contoh 6. Limit Fungsi Rasional. Carilah $\lim_{x \to 1} \frac{x^2+x+2}{x+1}$.

Jawab

Karena faktor penyebut tidak sama dengan 0 pada saat $x = 1$, maka dengan menerapkan Teorema 3, akan diperoleh

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2+x+2}{x+1} = \frac{1^2+1+2}{1+1} \qquad \text{Teorema 3}$$

$$= \frac{4}{2} = 2 \qquad \text{Penyederhanaan}$$

Teorema 4. Limit Fungsi Akar

Misalkan n adalah suatu bilangan bulat positif. Limit-limit di bawah ini berlaku untuk semua a jika n ganjil dan berlaku untuk $a > 0$ jika n genap.

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$$

Teorema 5. Limit Fungsi Komposisi

Jika f dan g adalah fungsi-fungsi sedemikian sehingga $\lim_{x \to a} g(x) = L$ dan $\lim_{x \to L} f(x) = f(L)$, maka $\lim_{x \to a} f\big(g(x)\big) = f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right) = f(L)$.

Contoh 7. Limit Fungsi Komposisi. Carilah masing-masing limit berikut.

a. $\lim_{x \to 0} \sqrt{x^2 + 4}$

b. $\lim_{x \to 3} \sqrt[3]{2x^2 - 10}$

Jawab

a. Misalkan $g(x) = x^2 + 4$ dan $f(x) = \sqrt{x}$.
Karena $\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0}(x^2 + 4) = 0^2 + 4 = 4$ dan $\lim_{x \to 4} f(x) = \lim_{x \to 4} \sqrt{x} = \sqrt{4} = 2$ maka menurut Teorema 5, $\lim_{x \to 0} \sqrt{x^2 + 4} = \sqrt{\lim_{x \to 0}(x^2 + 4)} = \sqrt{4} = 2$.

b. Misalkan $g(x) = 2x^2 - 10$ dan $f(x) = \sqrt[3]{x}$.
Karena $\lim_{x \to 3} g(x) = \lim_{x \to 3}(2x^2 - 10) = 2(3^2) - 10 = 8$ dan $\lim_{x \to 8} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{8} = 2$, maka menurut Teorema 5, $\lim_{x \to 3} \sqrt[3]{2x^2 - 10} = \sqrt[3]{\lim_{x \to 3}(2x^2 - 10)} = \sqrt[3]{8} = 2$

Teorema 6. Limit fungsi yang berlaku pada semua, kecuali satu titik

Misalkan a adalah bilangan real dan $f(x) = g(x)$ untuk semua $x \neq a$ pada suatu interval terbuka yang meliputi a. Jika limit $g(x)$ pada saat x menghampiri a ada, maka limit $f(x)$ juga ada dan

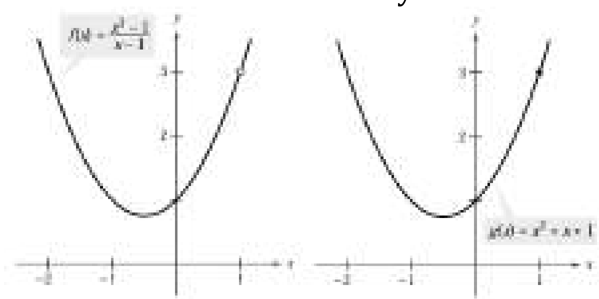
$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x)$$

Contoh 8. Mencari limit suatu fungsi. Carilah $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$

Jawab

Misalkan $f(x) = \frac{(x^3 - 1)}{(x - 1)}$. Kemudian dengan memfaktorkan pembilang, fungsi $f(x)$ dapat dituliskan menjadi $f(x) = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)} = x^2 + x + 1 = g(x), x \neq 1$. Jadi, untuk semua nilai x kecuali $x = 1$, fungsi f sama dengan g seperti diperlihatkan pada Gambar 10. Karena $\lim_{x \to 1} g(x)$ ada, maka dapat disimpulkan berdasarkan Teorema 6 bahwa f dan g memiliki nilai limit yang sama di titik $x = 1$.

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}$	Faktorisasi, Membagi faktor yang sama
$= \lim\limits_{x\to 1}(x^2 + x + 1)$	Teorema 6
$= 1^2 + 1 + 1$	Subtitusi langsung
$= 3$	Penyederhanaan



Gambar 6.10 Fungsi $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{g}$ kecuali pada titik $\boldsymbol{x = 1}$
(Sumber: Larson and Edwards, 2012)

Teorema 7. Teorema Apit

Jika $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ untuk semua x dalam interval tertutup yang meuat a kecuali mungkin pada titik a itu sendiri, dan jika $\lim\limits_{x\to a} h(x) = L = \lim\limits_{x\to a} g(x)$ maka $f(x)$ ada dan sama dengan L.

Teorema Apit akan dijabarkan lebih lanjut pada Bab 7 tentang limit sepihak.

Teorema 8. Eksistensi Limit

Misalkan f adalah suatu fungsi, serta a dan L masing-masing merupakan bilangan real. Limit $f(x)$ pada saat x menghampiri a adalah L jika dan hanya jika

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L \text{ dan } \lim_{x\to a^+} f(x) = L.$$

Limit ini disebut limit kiri dan limit kanan, yang akan dijelaskan lebih lanjut pada Bab 7 tentang limit sepihak.

Teorema 9. Sifat Kontinuitas

Jika k adalah bilangan real dan f dan g kontinu di titik $x = a$, maka fungsi-fungsi berikut ini juga kontinu di titik a tersebut.

1. Perkalian skalar kf
2. Jumlah dan selisih $f \pm g$
3. Perkalian fg
4. Pembagian $\frac{f}{g}$, jika $g(a) \neq 0$

Sifat-sifat kontinuitas akan dijelaskan lebih lanjut pada Bab 8 tentang kekontinuan.

Teorema 10. Kontinuitas Fungsi Komposisi

Jika fungsi g kontinu di titik a dan jika f kontinua pada $g(a)$ maka fungsi komposisi yang dinyatakan dengan $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$ juga kontinu di a.

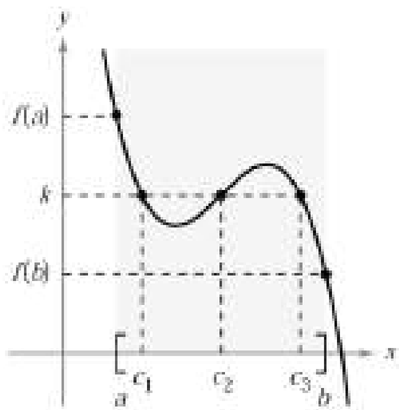
Bukti.
Menurut definisi kontinuitas, $\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$ dan $\lim_{x \to g(a)} f(x) = f\big(g(a)\big)$. Kemudian dengan menggunakan Teorema 5 dimana $L = g(a)$ akan didapatkan $\lim_{x \to a} f\big(g(x)\big) = f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right) = f\big(g(a)\big)$. Jadi, $(f \circ g) = f\big(g(x)\big)$ kontinu di a.

Teorema 11. Teorema Nilai Tengah

Jika f kontinu pada interval tertutup $[a, b]$, $f(a) \neq f(b)$, dan k adalah sembarang bilangan antara $f(a)$ dan $f(b)$, maka terdapat sitidak-tidaknya satu bilangan c di dalam $[a, b]$ sedemikian sehingga $f(c) = k$.

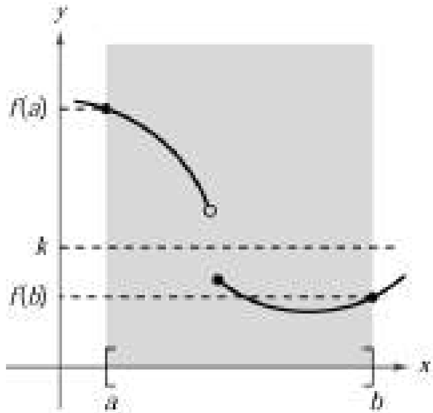
Teorema Nilai Tengah menyatakan bahwa setidak-tidaknya terdapat satu bilangan c, tetapi tidak memberikan suatu metode untuk menemukan nilai c. Teorema ini dinamakan teorema eksistensi. Dengan merujuk buku teks tentang Kalkulus Lanjut, dapat diketahui bahwa bukti teorema ini didasarkan pada sifat kelengkapan bilangan real. Teorema Nilai Tengah menyatakan bahwa untuk suatu fungsi f yang kontinu, jika nilai x dipilih antara a dan b, maka $f(x)$ pasti dapat diperoleh pada semua nilai antara $f(a)$ dan $f(b)$.

Teorema Nilai Tengah menjamin eksistensi dari setidak-tidaknya satu bilangan c di dalam interval tertutup $[a, b]$. Hal ini berarti ada kemungkinan terdapat lebih dari satu bilangan c sedemikian sehingga $f(c) = k$ sebagaimana diperlihatkan pada Gambar 11. Fungsi yang tidak kontinu tidak harus memenuhi sifat nilai tengah. Misalnya, grafik pada Gambar 12. Loncatan terjadi pada garis horisontal $y = k$ dan untuk fungsi ini tidak terdapat nilai c di dalam interval $[a, b]$ sedemikian sehingga $f(c) = k$.



Gambar. 6.11 Fungsi $\boldsymbol{f}$ kontinu pada $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$.
Terdapat tiga nilai $\boldsymbol{c}$ sehingga $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{k}$.

(Sumber: Larson and Edwards, 2012)



Gambar 6.12 Fungsi $\boldsymbol{f}$ tidak kontinus pada interval $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$.
Tidak ada $\boldsymbol{c}$ sedemikian sehingga $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{k}$.
(Sumber: Larson and Edwards, 012)

Teorema Nilai Tengah sering digunakan untuk menentukan letak nilai nola dari suatu fungsi yang kontinu pada suatu interval tertutup. Jika f kontinu pada $[a, b]$ serta $f(a)$ dan $f(b)$ berbeda tanda, maka Teorema Nilai Tengah memastikan eksistensi setidaknya terdapat satu nilai yang membuat fungsi f sama dengan nol di dalam interval tadi.

Teorema 12. Asimptot Vertikal

Misalkan f dan g adalah fungsi-fungsi yang kontinu dalam interval terbuka yang memuat a. Jika $f(a) \neq 0$, $g(a) = 0$, dan terdapat suatu interval terbuka yang membuat a sedemikian sehingga $g(x) \neq 0$ untuk semua $x \neq a$ dalam interval tersebut, maka grafik fungsi $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ memiliki asimptot vertikal $x = a$.

Teorema 13. Sifat-Sifat Limit Tak-hingga

Misalkan a dan L adalah bilangan-bilangan real dan fungsi-fungsi f dan g adalah $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ dan $\lim_{x \to a} g(x) = L$, maka

1.	Jumlah atau selisih	$\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \infty$
2.	Perkalian	$\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = \infty,\ L > 0$
		$\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = -\infty,\ L < 0$
3.	Pembagian	$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)} = 0$

Sifat yang sama berlaku untuk limit satu pihak dan juga untuk limit $f(x)$ pada saat x menghampiri a yang tak-hingga.

Bukti.
Untuk membuktikan bahwa limit $f(x) + g(x)$ tak-hingga, dipilih $M > 0$ kemudian mencari $\delta > 0$ sedemikian sehinggga $[f(x) + g(x)] > M$ jika $0 < |x - a| < \delta$. Untuk penyederhanaan kasus, asumsikan bahwa L positif. Misalkan $M_1 = M + 1$. Karena limit $f(x)$ tak-hingga, maka terdapat δ_1 sedemikian sehingga $f(x) > M_1$ pada saat $0 < |x - a| < \delta_1$. Demikian juga, karena limit $g(x) = L$, maka terdapat δ_2 sedemikian sehingga $|g(x) - L| < 1$ ketika $0 < |x - a| < \delta_2$. Dengan memilih δ sebagai bilangan yang terkecil dari δ_1 dan δ_2, dapat disimpulkan bahwa $0 < |x - a| < \delta$ berarti $f(x) > M + 1$ dan $|g(x) - L| < 1$. Ketidaksamaan yang kedua ini menyatakan bahwa $g(x) > L - 1$. Dengan menambahkannya ke ketidaksamaan pertama, diperoleh $f(x) + g(x) > (M + 1) + (L - 1) = M + L > M$. Jadi, $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = \infty$.

Contoh 9. Menentukan limit tak-hingga.
Carilah nilai limit-limit berikut:

a. $\lim_{x\to 0}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$ b. $\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+1}{1/(x-1)}$

Jawab

a. Karena $\lim_{x\to 0} 1 = 1$ dan $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = \infty$, maka $\lim_{x\to 0}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = \infty$ berdasarkan Sifat 1 Teorema 13.
b. Karena $\lim_{x\to 1^-}(x^2 + 1) = 2$ dan $\lim_{x\to 1^-}[1/(x - 1)] = -\infty$, maka berdasarkan Sifat 3 Theorema 13, $\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+1}{1/(x-1)} = 0$

6.3. Limit di Tak-hingga dan Limit Takhingga.

6.3.1. Limit di Tak-hingga

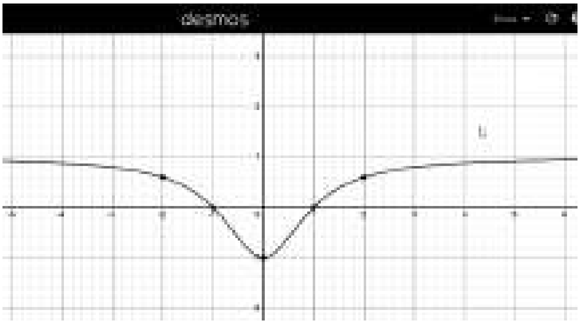
Untuk memahami limit di takhingga, kita akan mulai dengan menyelidiki karakteristik fungsi f yang didefinisikan dengan $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ dengan nilai x semakin naik. Tabel 6.2 memperlihatkan nilai fungsi tersebut sampai enam desimal (Stewart, 2016b).

Grafik fungsi untuk nilai-nilai dari Tabel 6.2 diperlihatkan pada Gambar 6.13 yang dibuat secara online dengan bantuan kalkulator grafik online (https://www.desmos.com/calculator).

Tabel 6.2 Nilai Fungsi

x	$f(x)$
0	-1
± 1	0
± 2	0,600000
± 3	0,800000
± 4	0,882353
± 5	0,923077
± 10	0,980198
± 50	0,999200
± 100	0,999800
± 1000	0,999998

(Sumber: Penulis, 2023)



Gambar 6.13 Limit di tak-hingga

(Sumber: Desmos.com)

Pada saat nilai x semakin besar, $f(x)$ semakin menghampiri 1. Gambar 13, memperlihatkan bahwa grafik f menghampiri garis horisontal $y = 1$ di sebelah kanan maupun kiri. Faktanya kita dapat membuat nilai $f(x)$ semakin menghampiri 1 dengan memilih nilai-nilai x semakin besar. Keadaan ini dapat dinyatakan secara simbolik dengan menuliskan:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$

Secara umum, digunakan notasi

$$\lim_{n\to\infty} f(x) = L$$

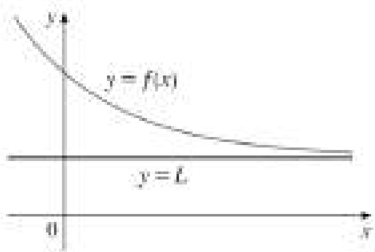
untuk menunjukkan bahwa nilai-nilai $f(x)$ semakin menghampiri L ketika x semakin besar.

Definisi 3. Intuisi limit di takhinga.

Jika f adalah suatu fungsi yang terdefinisi pada suatu interval (a, ∞), maka

$$\lim_{n\to\infty} f(x) = L$$

menyatakan bahwa nilai-nilai $f(x)$ dapat dibuat menghampiri L dengan membuat nilai x cukup besar (Stewart, 2016a).



Gambar 6.14 Ilustrasi $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} f(x) = L}$

(Sumber: Penulis, 2023)

Dalam penjelasan ini, simbol ∞ tidak menyatakan suatu bilangan (Stewart, 2016a, 2016b). Namun demikian, $\lim_{n\to\infty} f(x) = L$ dapat diinterpretasikan: "limit fungsi $f(x)$ ketika nilai x menghampiri tak hingga, adalah L."

Pengertian dari ungkapan-ungkapan tersebut termuat di dalam Definisi 3. Ilustrasi geometris untuk Definisi 3 diperlihatkan pada Gambar 14. Perhatikan bahwa ada banyak cara grafik f menghampiri garis $y = L$ yang dinamakan asimptot datar.

Kembali ke Gambar 13, dapat dilihat bahwa untuk nilai-nilai negatif x yang besar, nilai-nilai $f(x)$ akan menghampiri 1. Dengan mengatur sedemikian sehingga nilai x negatif turun tanpa batas, maka kita dapat membuat $f(x)$ menghampiri 1. Hal ini dapat ditulis:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$

Definisi 4.
Misalkan f adalah suatu fungsi yang terdefinisi pada suatu interval $(-\infty, a)$. Maka

$$\lim_{n\to-\infty} f(x) = L$$

mengandung pengertian bahwa nilai-nilai $f(x)$ dapat dibuat menghampiri L dengan cara mengatur nilai x negatif yang cukup besar.

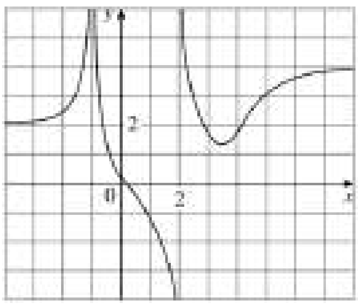
Definisi 5.
Garis $y = L$ disebut asimptot datar dari kurva $f = f(x)$ jika

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \text{ atau } \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

Sebagai contoh, kurva yang digambarkan pada Gambar 6.13 menunjukkan garis fungsi $y = 1$ sebagai asimptot datar karena

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1$$

Contoh 10. Carilah limit tak-hingga, limit di tak hingga, dan asimptot dari f yang grafiknya diperlihatkan pada Gambar 15.



Gambar. 6.15 Grafik limit di tak hingga, dan asimptot dari ***f***

(Sumber: Hass et al., 2020)

Jawab

Pada Gambar 6.15 dapat dilihat bahwa nilai-nilai $f(x)$ semakin besar apabila $x \to -1$ dari kiri maupun kanan. Karena itu,

$$\lim_{x\to-1} f(x) = \infty$$

Terlihat juga pada Gambar 6.15 bahwa $f(x)$ menghampiri nilai negatif yang besar pada saat x menghampiri 2 dari kiri, tetapi pada saat yang sama akan menghampiri nilai posisitf yang besar untuk x menghampiri 2 dari kanan. Jadi,

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty \text{ dan } \lim_{x\to 2^+} f(x) = \infty$$

Artinya, garis $x = -1$ dan $x = 2$ kedua-duanya merupakan asimptot tegak.

Demikian juga, pada saat nilai x bertambah besar, terlihat bahwa $f(x)$ menghampiri 4. Tetapi pada saat nilai x turun sampai negatif, $f(x)$ menghampiri 2. Jadi,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 4 \text{ dan } \lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$$

Hal ini berarti $y = 4$ dan $y = 2$ kedua-duanya adalah asimptot datar.

Contoh 11. Carilah $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}$ dan $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}$.

Jawab

Perhatikan bahwa ketika nilai x cukup besar, $\frac{1}{x}$ bernilai kecil. Misalnya,

$$\frac{1}{100} = 0{,}01 \qquad \frac{1}{10.000} = 0{,}0001 \qquad \frac{1}{1.000.000} = 0{,}000001$$

Faktanya, dengan memilih x cukup besar, kita dapat membuat $\frac{1}{x}$ sedekat mungkin dengan 0. Karena itu,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Dengan alasan yang sama, dapat ditunjukkan bahwa untuk $-x$ yang besar, nilai $\frac{1}{x}$ menjadi nilai negatif yang kecil. Jadi diperoleh juga

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Sebagai akibatnya, garis $y = 0$ (yaitu sumbu x) merupakan asimptot datar dari kurva $y = \frac{1}{x}$. Persamaan ini merupakan persamaan hiperbola ekuilateral.

Pada umumnya teorema-teorema limit yang telah disebutkan sebelumnya, berlaku juga untuk limit-limit di tak hingga. Dapat dibuktikan bahwa teorema-teorema limit tersebut juga berlaku jika "$x \to a$" diganti dengan "$x \to \infty$" atau "$x \to -\infty$." Jika kita menggabungkan Teorema 3 dan Teorema 13(3), diperoleh aturan penting dalam menghitung limit seperti di bawah ini.

Teorema 14. Jika $r > 0$ merupakan bilangan rasional, maka

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^r} = 0$$

Jika $r > 0$ merupakan bilangan rasional sedemikian sehingga x^r terdefinisi untuk semua r, maka

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^r} = 0$$

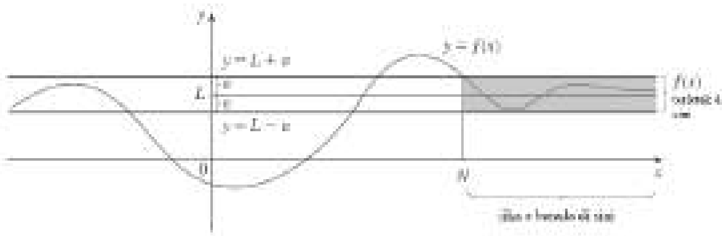
6.3.2. Definisi Formal Limit di Takhingga

Definisi 6. Misalkan f adalah suatu fungsi yang terdefinisi dalam interval terbuka (a, ∞), maka

$$\lim_{n \to \infty} f(x) = L$$

Jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat satu bilangan $N > 0$ sedemikian sehingga jika $x > N$ maka $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Definisi ini menjelaskan bahwa nilai $f(x)$ dapat dibuat sedekat mungkin dengan L dengan jarak ε , dengan cara membuat x cukup besar (lebih besar dari N dan N bergantung pada nilai ε) dimana ε adalah sembarang bilangan positif. Pada Gambar 16, dapat dilihat bahwa dengan membuat nilai x besar (lebih besar dari N) kita dapat membuat fungsi f di antara garis mendatar $y = L - \varepsilon$ dan $y = L + \varepsilon$, sekecil apapun nilai ε yang dipilih.



Gambar. 6.16 $\boldsymbol{\lim_{x\to\infty} f(x) = L}$

(Sumber: Stewart, Clegg dan Watson, 2021)

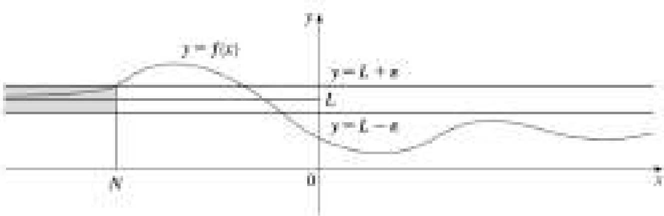
Gambar.6.16 memperlihatkan bahwa semakin kecil nilai ε yang dipilih, semakin besar juga nilai N yang diperoleh.

Dengan cara yang sama, definisi formal dari Definisi 2 dijelaskan pada Definisi 7 dan Gambar 6.17.

Definisi 7. Misalkan suatu fungsi terdefinisi pada suatu interval terbuka $(-\infty, a)$, maka

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

menyatakan bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat N yang sesuai sedemikian sehingga jika $x < N$ maka $|f(x)| - L < \varepsilon$.



Gambar. 6.17 $\boldsymbol{\lim_{x\to-\infty} f(x) = L}$

(Sumber: Stewart, Clegg dan Watson, 2021)

Contoh 12. Tentukanlah $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-x-2}{5x^2+4x+1}$ dan tentukan sifat limit mana yang digunakan pada setiap langkah.

Jawab

Jika nilai x semakin besar maka pembilang dan penyebut akan semakin besar juga. Untuk menghitung limit di takhingga dari semua fungsi rasional, pertama-tama pembilang dan penyebut masing-masing dibagi dengan x yang berpangkat paling tinggi yang ada di dalam penyebut. Dalam contoh ini, x yang berpangkat tertinggi di dalam penyebut adalah x^2.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-x-2}{5x^2+4x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2-x-2}{x^2}}{\frac{5x^2+4x+1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}{5+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}$$

$=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(5+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}$ (Sifat 5)

$=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}3-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}-2\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}5+4\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}$ (Sifat 1,2,3)

$=\frac{3-0-0}{5+0+0}$ (Sifat 7 dan Teorema 5)

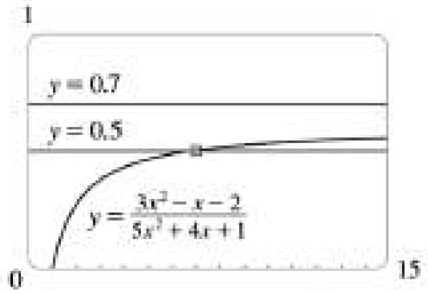
$=\frac{3}{5}$

Contoh 13. Gunakan grafik untuk mencari suatu bilangan N sehingga jika $x>N$ maka $\left|\frac{3x^2-x-2}{5x^2+4x+1}-0{,}6\right|<0{,}1$

Jawab

Ketidaksamaan di atas ditulis kembali menjadi:

$$0{,}5<\frac{3x^2-x-2}{5x^2+4x+1}<0{,}7$$



Gambar. 6.18 Kurva

(Sumber: Penulis, 2023)

Kita akan menentukan nilai-nilai x dimana kurva yang diberikan terletak di antara garis datar $y = 0{,}5$ dan $y = 0{,}7$ (Gambar 6.18). Dengan memperhatikan gambar tersebut, dapat diperkirakan bahwa kurva akan memotong garis $y = 5$ pada saat $x \approx 6{,}7$. Pada bagian sebelah kanan dari bilangan ini, dapat dilihat bahwa kurva tetap berada diantara $y = 0{,}5$ dan $y = 0{,}7$. Dapat dikatakan bahwa jika $x > 7$ maka $\left|\frac{3x^2-x-2}{5x^2+4x+1} - 0{,}6\right| < 0{,}1$. Dengan kata lain, untuk $\varepsilon = 0{,}01$ dapat dipilih $N = 7$ atau bilangan yang lebih besar berdasarkan Definisi 6.

6.3.3. Limit Takhingga

Limit fungsi $f(x)$ yang menurun atau naik tanpa batas jika x menghampiri a dinamakan limit tak hingga. Jika $f(x)$ menghampiri nilai takhingga (atau negatif takhingga) ketika x menghampiri a dari kanan atau kiri, maka garis $x = a$ disebut asimptot vertikal dari grafik $f(x)$. Asimptot vertikal dari $f(x)$ memenuhi setidak-tidaknya satu dari enam pernyataan di bawah ini:

a. $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ b. $\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$ c. $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$

d. $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ e. $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ f. $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

Definisi intuisi limit tak hingga dapat dituliskan

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

jika nilai $f(x)$ dibuat sedemikian besar dengan cara membuat x sedekat mungkin dengan a dari kiri maupun kanan, tetapi tidak sama dengan a itu sendiri. Dengan cara yang sama juga dapat dituliskan

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

jika nilai $f(x)$ dibuat sedemikian besar dan negatif, dengan cara membuat x sedekat mungkin dengan a dari kiri maupun kanan, tetapi tidak sama dengan a.

6.3.4. Definisi Formal Limit Takhingga

Definisi 8. Jika f adalah fungsi yang terdefinisi pada semua bilangan real dalam suatu interval terbuka yang memuat a kecuali mungkin pada titik a itu sendiri, maka pernyataan $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ menyatakan bahwa untuk setiap $M > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga $f(x) > M$ apabila $0 < |x - a| < \delta$. Demikian pula, pernyataan $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ menyatakan bahwa untuk setiap $N < 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga $f(x) < N$ apabila $0 < |x - a| < \delta$.

Untuk mendefinisikan limit tak-hingga kanan, $0 < |x - a| < \delta$ diubah menjadi $a < x < a + \delta$. Untuk mendefinisikan limit tak-hingga kiri, $0 < |x - a| < \delta$ diubah menjadi $a - \delta < x < a$.

6.3.5. Limit Tak Hingga di Tak Hingga

Notasi $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ digunakan untuk menunjukkan bahwa nilai $f(x)$ akan bertambah semakin besar jika nilai x semakin besar. Pengertian yang sama juga berlaku pada tiga kasus di bawah ini.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$, dan $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Contoh 14. Carilah $\lim_{x \to \infty} x^3$ dan $\lim_{x \to -\infty} x^3$

Jawab

Jika nilai x semakin besar, x^3 juga semakin besar. Sebagai contoh,

$$10^3 = 1000$$
$$100^3 = 1.000.000$$
$$1000^3 = 1.000.000.000$$

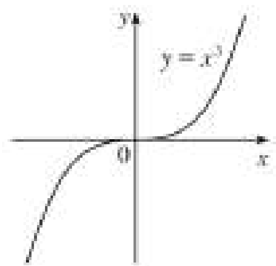
Dengan kata lain, kita dapat membuat nilai x^3 sebesar mungkin dengan membuat x juga besar. Karena itu dapat dituliskan

$$\lim_{x \to \infty} x^3 = \infty$$

Demikian juga jika nilai x besar dan negatif, x^3juga bertambah besar dan negatif.

$$\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$$

Pernyataan-pernyataan ini ditunjukkan pada grafik $y = x^3$ dalam Gambar 19.



Gambar. 6.19 $\boldsymbol{\lim_{x \to \infty} x^3} = \infty$, $\boldsymbol{\lim_{x \to -\infty} x^3} = -\infty$

(Sumber: Penulis, 2023)

Contoh 15. Tentukanlah nilai $\lim_{x\infty}(x^2 - x)$

Jawab

Banyak mahasiswa melakukan kesalahan dengan menuliskan penyelesaian sebagai berikut.

$$\lim_{x\to\infty}(x^2 - x) = \lim_{x\to\infty} x^2 - \lim_{x\to\infty} x = \infty - \infty$$

Teorema limit tidak dapat diberlakukan pada limit tak hingga karena ∞ bukan merupakan bilangan. Kuantitas $\infty - \infty$ tidak dapat didefinisikan, dan tidak dapat disamakan dengan 0. Meskipun demikian, kita dapat menuliskan

$$\lim_{x\to\infty}(x^2 - x) = \lim_{x\to\infty} x(x-1) = \infty$$

karena x maupun $(x-1)$ kedua-duanya bernilai besar maka perkaliannya juga akan semakin besar.

Contoh 16. Tentukanlah $\lim_{x\infty}\frac{x^2+x}{3-x}$

Jawab

Untuk menyelesaikan bentuk seperti ini dalam limit tak hingga, maka pembilang dan penyebut dibagi dengan x yang pangkatnya paling tinggi dari penyebut.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{3-x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x}+\frac{x}{x}}{\frac{3}{x}-\frac{x}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{\frac{3}{x}-1} = -\infty$$

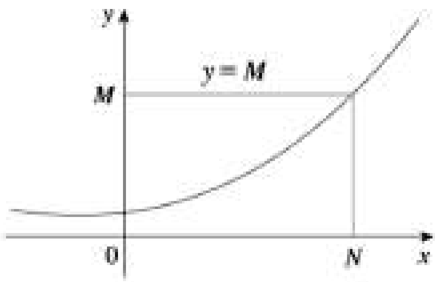
karena $x+1 \to \infty$ dan $\frac{3}{x} - 1 \to 0 - 1 = -1$ untuk $x \to \infty$.

Definisi 9. Misalkan fungsi f terdefinisi pada suatu interval terbuka (a, ∞). Maka

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

menyatakan bahwa untuk setiap bilangan positif M, terdapat suatu bilangan positif N sedemikian sehingga jika $x > N$ maka $f(x) > M$.

Hal yang sama juga berlaku jika simbol ∞ diganti menjadi $-\infty$.



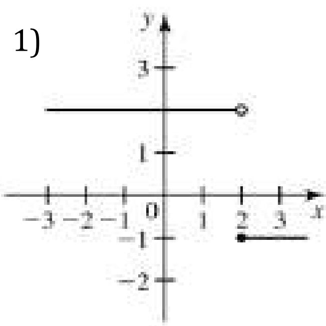
Gambar. 6.20 $\boldsymbol{\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty}$

(Sumber: Penulis, 2023)

6.4. Soal-Soal Latihan

Untuk soal-soal nomor 1-3, gunakan grafik fungsi f untuk menentukan nilai masing-masing limit.

1)

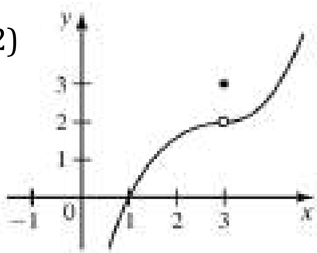


a) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$

b) $\lim_{x\to 2^+} f(x)$

c) $\lim_{x\to 2} f(x)$

2)

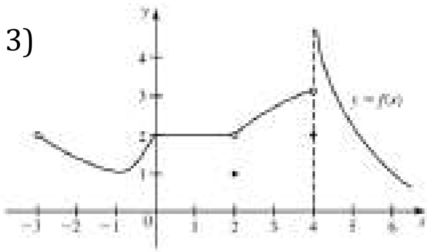


a) $\lim_{x\to 3^-} f(x)$

b) $\lim_{x\to 3^+} f(x)$

c) $\lim_{x\to 3} f(x)$

3)



a) $\lim_{x \to -3^+} f(x) = 2$

b) $\lim_{x \to 0} f(x) = 2$

c) $\lim_{x \to 2} f(x) = 1$

d) $\lim_{x \to 4^-} f(x) = 3$

e) $\lim_{x \to 4^+} f(x) =$

4) Carilah $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

5) Misalkan $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{jika } x = 0 \\ x \sin \frac{1}{x} & \text{jika } x \neq 0 \end{cases}$

Susunlah tabel nilai-nilai untuk menebak $\lim_{x \to 0^+} f(x)$, $\lim_{x \to 0^-} f(x)$, dan $\lim_{x \to 0} f(x)$. Jelaskan jawaban anda.

6) Jika diketahui $\lim_{x \to 3}(2x - 5) = 1$ carilah δ sedemikian sehingga $|(2x - 5) - 1| < 0{,}001$ apabila $0 < |x - 3| < \delta$.

7) Gunakan definisi $\varepsilon - \delta$ (definisi formal limit) untuk membuktikan bahwa $\lim_{x \to 2}(3x - 2) = 4$

8) Hitunglah $\lim_{x \to \infty} \frac{2^x + 5(3^x)}{3(2^x) - 3^x}$ dan $\lim_{x \to -\infty} \frac{2^x + 5(3^x)}{3(2^x) - 3^x}$

9) Carilah asimptot vertikal dari grafik fungsi $f(x) = \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-2}$

10) Carilah $\lim_{x \to a} \frac{x^2+x+4}{x^3-2x^2+7}$ dan $\lim_{x \to 2} \sqrt{2x + 1}$

DAFTAR PUSTAKA

Adams, R.A. and Essex, C. (2018) Calculius A Complete Course. 9th edn. Canada: Pearson.

Anton, H., Bivens, I. and Davis, S. (2009) Calculus Early Transcendentals. 9th edn. USA: John Wiley & Sons.

Briggs, W. et al. (2019) Calculus Early Transcendentals. 3rd edn. New York: Pearson.

Guichard, D. (2017) Calculus Early Transcendentals an Open Text. California, USA: Lyryx Learning.

Hass, J. et al. (2020) University Calculus: Early Transcendental 4th Edition in SI Units. 4th edn, The American Mathematical Monthly. 4th edn. United Kingdom: Pearson Education, Inc. Available at: www.pearsonglobaleditions.com ©.

Larson, R. and Edwards, B.H. (2012) Calculus I With Precalculus: A One Year Course. 3rd edn. Boston, USA: Brooks/Cole Cengage Learning.

Mishra, S. (2016) Fundamentals of Mathematics for JEE Main and Advanced Differential Calculus. Uttar Pradesh, India: Pearson India Education Services Pvt. Ltd.

Salas, S., Hille, E. and Etgen, G. (2007) Calculus One and Several Variables. 10th edn. New Jersey, USA: John Wiley & Sons, Inc.

Stewart, J. (2008) Calculus. 6th edn. Belmont CA, USA: Thomson Brooks/Cole.

Stewart, J. (2016a) Calculus. 8th edn. Boston, USA: Cengage Learning.

Stewart, J. (2016b) Calculus Early Transcendentals. 8th edn. Boston, USA: Cengage Learning.

Stewart, J., Clegg, D. and Watson, S. (2021) Calculus Early Tanscendentals Metric Version 9E. Australia: Cengage Learning, Inc.

Tan, S.T. (2010) Calculus Single Variable. Belmont CA, USA: Brooks/Cole Cengage Learning.

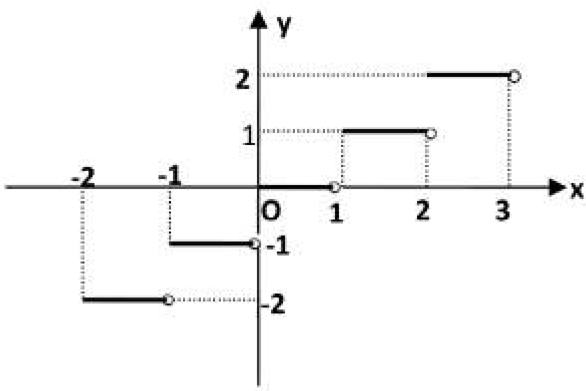
BAB 7

LIMIT SEPIHAK

Oleh Cynthia Tri Octavianti, S.Si., M.Sc.

7.1. Pendahuluan

Jika kita meninjau fungsi yang mempunyai lompatan seperti fungsi bilangan bulat terbesar $[\![x]\!]$ pada gambar 7.1 untuk setiap bilangan bulat, maka diperoleh limitnya tidak ada pada setiap titik lompatan. (Varberg et al., 2003)



Gambar 7.1 fungsi bilangan bulat terbesar

(Sumber : Sumadji, 2022)

Untuk fungsi seperti di atas, maka kita dapat menggunakan limit sepihak. Untuk notasi $x \to c^{+}$merupakan x mendekati c dari kanan dan untuk notasi $x \to c^{-}$merupakan x mendekati c dari kiri.

Definisi (Limit Kiri dan Limit Kanan)

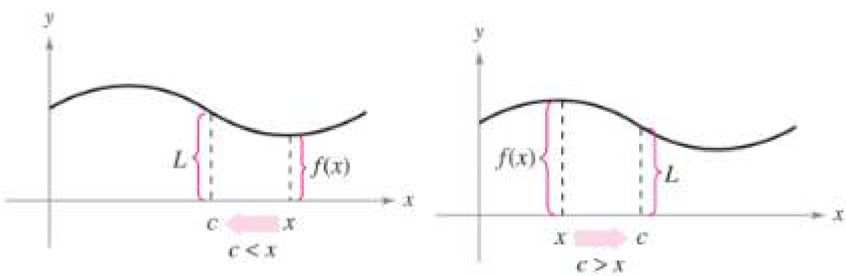
Limit Kiri : $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = L$ *atau* $f(x) \to L$ *untuk* $x \to c^-$.

Limit Kanan : $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = L$ ***atau*** $f(x) \to L$ ***untuk*** $x \to c^+$

7.2. Limit Kiri dan Limit Kanan

Berikut diberikan definisi limit kiri dan limit kanan menurut (Larson, 2016)

Berikut diberikan ilustrasi seperti pada gambar 7.2.



Gambar 7.2 grafik Limit x mendekati c dari kanan dan grafik limit x mendekati c dari kiri

(Sumber: Sikder, 2023)

Contoh 1

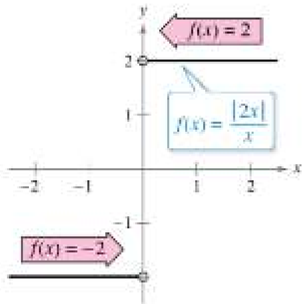
Walaupun untuk $\lim\limits_{x \to 1} [\![x]\!]$ tidak ada, namun dari gambar 7.1 kita dapat menghitung limit kiri dan limit kanannya. Dari gambar 7.1 diperoleh $f(x) = 0$ untuk $x < 1$ dan $f(x) = 1$ untuk $x < 1$, sehingga

$$\lim_{x \to 1^-} [\![x]\!] = 0, \lim_{x \to 1^+} [\![x]\!] = 1.$$

Contoh 2

Tentukan Limit f(x) untuk x mendekati 0 dari kiri dan dari kanan, untuk fungsi $f(x) = \frac{|2x|}{x}$.

Penyelesaian



Gambar 7.3 grafik fungsi $f(x) = \frac{|2x|}{x}$

(Sumber: Larson, 2016)

Dari Gambar 7.3 diperoleh bahwa $f(x) = -2$ untuk $x < 0$, jadi

Teorema
$\lim_{x \to c} f(x) = L$ jika dan hanya jika $\lim_{x \to c^-} f(x) = L$ dan $\lim_{x \to c^+} f(x) = L$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -2.$

Dari gambar di atas juga diperoleh bahwa $f(x) = 2$ untuk $x < 0$, jadi $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 2.$

Contoh 3.

Jika kita melihat contoh 1 dan contoh 2 diperoleh bahwa $\lim_{x\to 1} [\![x]\!]$ tidak ada dan $\lim_{x\to 0} \frac{|2x|}{x}$ tidak ada, karena limit kiri dan limit kanannya tidak sama.

Contoh 4

Diketahui $f(x) = \begin{cases} 2x^2, & x \le 1 \\ 3 - x, & x > 1 \end{cases}$, tentukan limit fungsi untuk x mendekati 1.

Penyelesaian

Limit Kiri : $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1} 2x^2 = 2$

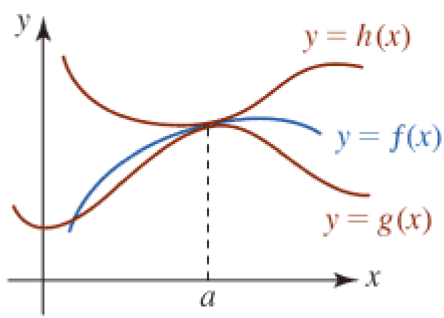
Limit Kanan : $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} 3 - x = 2$

Limit kiri = Limit kanan = 2, jadi $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$.

7.3. Teorema Apit

Pada Gambar 7.4, jika grafik f(x) diapit diantara grafik dua fungsi lain g(x) dan h(x) untuk setiap x dekat dengan a, dan jika fungsi g dan h mempunyai limit yang sama yaitu L untuk $x \to a$, merupakan alasan berdirinya bahwa fungsi f juga mendekati L untuk $x \to a$.(Zill & Wright, 2009)

Teorema Apit
Andaikan $f, g,$ dan h adalah fungsi-fungsi yang memenuhi $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ untuk semua x dalam interval terbuka yang memuat titik a, kecuali mungkin di a. Jika $$\lim_{x\to a} g(x) = L \text{ dan } \lim_{x\to a} h(x) = L$$ Maka $\lim_{x\to a} f(x) = L$



Gambar 7.4 Grafik fungsi f diapit oleh fungsi g dan fungsi h

(Sumber: Zill & Wright, 2009)

Bukti Andaikan diketahui $\varepsilon > 0$. Pilih δ_1 sedemikian hingga

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon$$

Dan δ_2 sedemikian hingga

$$0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon$$

Pilih δ_3 sedemikian hingga

$$0 < |x - a| < \delta_3 \Rightarrow g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

Andaikan $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. Maka

$$0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow L - \varepsilon < g(x) \le f(x) \le h(x) < L + \varepsilon$$

Jadi dapat disimpulkan bahwa $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$.■

Contoh 5

Tentukan $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x}$ dengan menggunakan teorema apit.

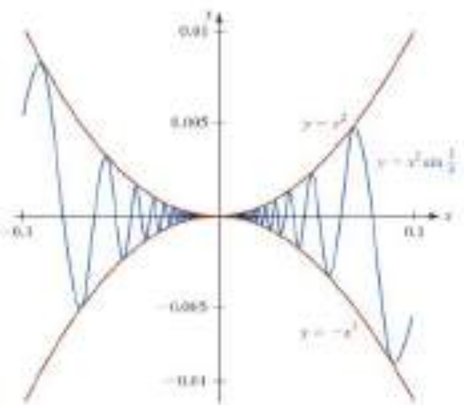
Penyelesaian

Perhatikan bahwa $-1 \le \sin\frac{1}{x} \le 1$ sehingga dapat kita peroleh
$-x^2 \le x^2 \sin\frac{1}{x} \le x^2$.

Ambil $g(x) = -x^2$ dan $h(x) = x^2$. Dapat diperoleh

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} -x^2 = 0 \;\; \text{dan} \lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0} x^2 = 0.$$

Dengan menggunakan Teorema Apit dapat disimpulkan
$\lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0.$



Gambar 7.5 Grafik fungsi *f*, *g* dan *h*

(Sumber : Zill & Wright, 2009)

7.4. Limit Fungsi Trigonometri

Dalam penyelesaian limit fungsi trigonometri yang harus dihindari adalah hasilnya berupa bentuk tak tentu seperti $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, \infty.0$. jika ditemukan bentuk tak tentu maka fungsi tersebut harus diuraikan. (Sudaryono, 2017)

Berikut diberikan limit fungsi trigonometri secara umum

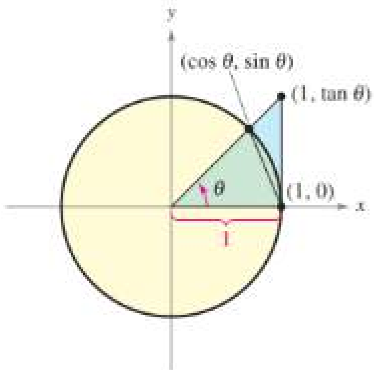
Teorema (Dua Limit trigonometri spesial)
1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$

Tabel 7.1 Tabel limit fungsi trigonometri

$\lim\limits_{x \to a} \sin x = \sin a$	$\lim\limits_{x \to a} \sec x = \sec a$
$\lim\limits_{x \to a} \cos x = \cos a$	$\lim\limits_{x \to a} \csc x = \csc a$
$\lim\limits_{x \to a} \tan x = \tan a$	$\lim\limits_{x \to a} \cot x = \cot a$

(Sumber : Zill & Wright, 2009)

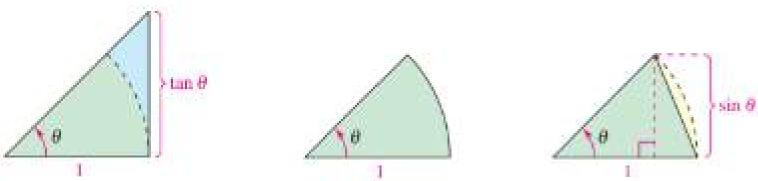
Bukti



Gambar 7.6 Limit Fungsi Trigonometri

(Sumber: Sikder, 2023)

Jika kita menggunakan besaran radian, maka dapat diperoleh luas sebagai berikut



Luas segitiga ≥ Luas sektor ≥ Luas segitiga

$$\frac{\tan\theta}{2} \geq \frac{\theta}{2} \geq \frac{\sin\theta}{2}$$

Dengan mengalikan setiap ruas dengan $\frac{2}{\sin\theta}$ diperoleh

$$\frac{1}{\cos\theta} \geq \frac{\theta}{\sin\theta} \geq 1$$

Jika ketidaksamaan dibalik, maka diperoleh

$$\cos\theta \leq \frac{\sin\theta}{\theta} \leq 1$$

Karena $\cos\theta = \cos(-\theta)$ dan $\frac{\sin\theta}{\theta} = \frac{\sin(-\theta)}{-\theta}$, maka dapat disimpulkan ketaksamaan di atas valid pada interval terbuka $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Selanjutnya $\lim\limits_{x\to 0} \cos\theta = 1$ dan $\lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$, dengan menggunakan teorema apit diperoleh $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. ■

Bukti no 2 sebagai Latihan soal.

Contoh 6.

Tentukan nilai limit dari $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$.

Penyelesaian

Jika kita substitusikan x dengan 0, diperoleh bentuk tak tentu $\frac{0}{0}$.

Untuk menyelesaikan soal ini kita ubah bentuk tan x menjadi $\frac{\sin x}{\cos x}$, sehingga diperoleh

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)\left(\frac{1}{\cos x}\right)$$

Karena

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

dan

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$$

sehingga diperoleh

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right) \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\cos x}\right) = 1$$

Contoh 7.

Tentukan nilai limit dari $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x}$.

Penyelesaian

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x} = 5 \lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{5x}$$

Misal $y = 5x$

$$= 5 \lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = 5.$$

7.5. Soal-Soal Latihan

Pada soal-soal 1-4, cari limit sepihaknya dan berikan alasannya

1. $\lim_{t \to -3^+} \frac{\sqrt{3+t}}{t}$
2. $\lim_{t \to 1^+} \frac{t-1}{\sqrt{t^2-1}}$
3. $\lim_{x \to 1^-} \frac{\sqrt{1+x}}{4+4x}$
4. $\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2-3x+2}{\sqrt{x^2-4}}$

Pada soal-soal 5-8, gunakan teorema apit untuk menghitung limit yang diberikan

5. $\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x}$
6. $\lim_{x \to 0} x^2 \cos \frac{\pi}{x}$
7. $\lim_{x \to 2} f(x)$ dimana $2x - 1 \leq f(x) \leq x^2 - 2x, x \neq 2.$
8. $\lim_{x \to 0} f(x)$ dimana $|f(x) - 1| \leq x^2, x \neq 0$

Pada soal-soal 9-12, tentukan limit fungsi trigonometri yang diberikan

9. $\lim_{t \to 0} \frac{\sin 3t}{2t}$
10. $\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{4+\cos t}$
11. $\lim_{t \to 0} \frac{\tan t}{3t}$
12. $\lim_{t \to 0} 5t \cos 2t$

DAFTAR PUSTAKA

Larson, R. (2016). *Precalculus with Limits*. Cengage Learning. https://www.google.co.id/books/edition/Precalculus_with_Limits/dPK5DQAAQBAJ?hl=en&gbpv=0

Sikder, I. (2023). *Calculus Textbook for College and University USA*. Ibrahim Sikder. https://www.google.co.id/books/edition/Calculus_Textbook_for_College_and_Univer/84zCEAAAQBAJ?hl=en&gbpv=0

Sudaryono. (2017). *Kalkulus Diferensial Teori dan Aplikasi*. Prenada Media.

Sumadji. (2022). *KALKULUS*. Media Nusa Creative (MNC Publishing). https://www.google.co.id/books/edition/KALKULUS/a7NYEAAAQBAJ?hl=en&gbpv=0

Varberg, D., Purcell, E. J., & Rigdon, S. E. (2003). *Kalkulus Jl. 1 Ed. 8*. https://books.google.co.id/books?id=TksIOewEGZ8C

Zill, D., & Wright, W. S. (2009). *Calculus Early Transcendentals*. Jones & Bartlett Learning.

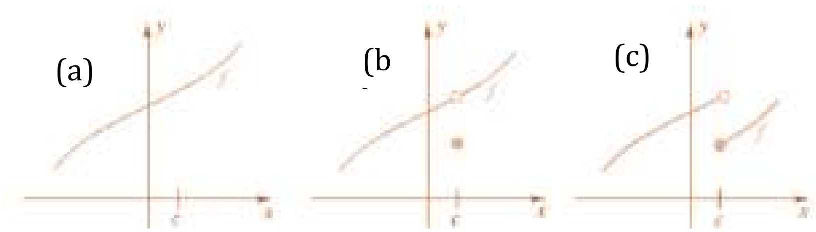
BAB 8

KEKONTINUAN

Oleh Hanna Hilyati Aulia, M.Si.

8.1. Pendahuluan

Definisi Kekontinuan Suatu Fungsi. Kata kontinu digunakan untuk menggambarkan proses yang berlangsung tanpa perubahan mendadak. Selanjutnya, kekontinuan menjadi fitur penting dari banyak proses alami. Pada Bab sebelumnya dibahas mengenai konsep limit, dimana suatu fungsi f(x) dapat (a) memiliki limit menuju suatu titik c dengan $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$, atau (b) limit ada namun $\lim_{x \to c} f(x) \neq f(c)$, atau (c) f(x) tidak memiliki limit. Dengan menggunakan pendekatan secara grafis, dapat ditunjukkan pada Gambar 8.1.



Gambar 8.1 Grafik Limit Suatu Fungsi $\lim_{x \to c} f(x)$

(Sumber : Calculus, Purcell 9th Edition)

Berdasarkan ilustrasi pada Gambar 8.1 dapat definisikan suatu fungsi kontinu sebagai berikut.

Definisi 8.1 Kontinu pada suatu titik Misalkan f adalah fungsi yang terdefinisi pada interval terbuka yang memuat c. f dikatakan kontinu pada c apabila

$$\lim_{x \to c} f(x) = c$$

dengan kata lain, kontinu pada suatu titik mensyaratkan

1. $\lim_{x \to c} f(x)$ ada
2. $f(c)$ ada
3. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

Apabila salah satu dari 3 ketentuan tidak dipenuhi, maka f tidak kontinu (diskontinu) pada c. Definisi ini kemudian dikembangkan ke beberapa titik atau interval.

Definisi 8.2 Kontinu pada suatu interval I

Misalkan f adalah fungsi yang terdefinisi pada interval terbuka (a, b). f dikatakan kontinu pada setiap poin pada interval (a, b).

Definisi 8.3 Kontinu pada suatu interval II

Fungsi f kontinu kanan pada titik a jika $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ dan f kontinu kiri pada titik b jika $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$. Fungsi f dikatakan kontinu pada interval tertutup $[a, b]$ jika f kontinu pada interval (a, b), kontinu kanan pada a dan kontinu kiri pada b.

Teorema 8.1 Kekontinuan pada Operasi Fungsi

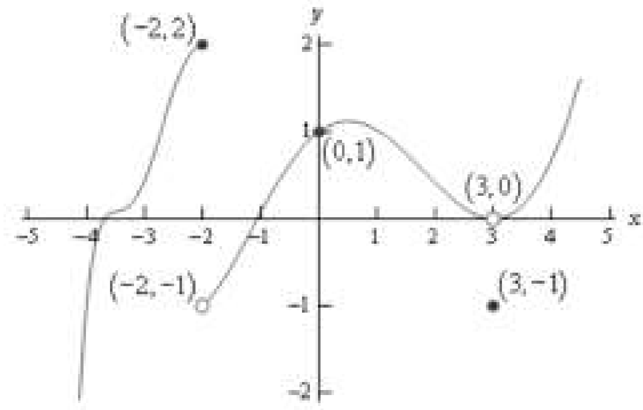
Jika f dan g adalah fungsi yang kontinu pada c, maka

1. Fungsi kf kontinu pada c untuk k bilangan real
2. Fungsi $f \pm g$ kontinu pada c
3. Fungsi fg kontinu pada c
4. Fungsi $\frac{f}{g}$, (dengan $g(c) \neq 0$) kontinu pada c
5. Fungsi f^n kontinu pada c

6. Fungsi $\sqrt[n]{f}$ (dengan $f(c) > 0$ jika n genap) kontinu pada c

Contoh 8.1

Diberikan fungsi f(x) seperti pada Gambar 8.2. Tentukan apakah f(x) kontinu pada $x = -2$, $x = 0$ dan $x = 3$.



Gambar 8.2 Grafik Suatu Fungsi f)x)

(Sumber :Marsden and Weinstein, 2022))

Penyelesaian:

Untuk menjawab pertanyaan, kita perlu mengecek limit fungsi dimasing-masing titik. Apabila $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, maka kontinu, sebaliknya, tidak kontinu.

Untuk $x = -2$

$f(-2) = 2$ namun $\lim_{x \to -2} f(x)$ tidak ada.

Nilai fungsi dan limitnya tidak sama sehingga fungsi tersebut tidak kontinu pada titik $x = -2$. Diskontinuitas semacam ini dalam grafik disebut diskontinuitas lompatan (*jump discontinuity*). Diskontinuitas lompatan terjadi ketika grafik memiliki jeda di dalamnya seperti grafik ini dan nilai fungsi di kedua sisi jeda adalah terbatas (yaitu fungsinya tidak menuju tak terhingga).

Pada bagian selanjutnya akan dibahas mengenai kekontinuan pada fungsi-fungsi beserta contohnya.

Untuk $x = 0$

$f(0) = 1$ dan $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$.

Artinya fungsi $f(x)$ kontinu di 0.

Untuk $x = 3$

$f(3) = -1$ dan $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$.

Sehingga fungsi tidak kontinu di titik $x = 3$.

Dari contoh ini kita bisa mendapatkan definisi kontinuitas yang dengan cepat. Suatu fungsi kontinu pada suatu interval jika kita dapat menggambar grafik dari awal sampai akhir tanpa pernah sekali pun mengambil pensil kita. Grafik pada contoh hanya memiliki dua diskontinuitas karena hanya ada dua tempat di mana kita harus mengambil pensil untuk membuat sketsa. Dengan kata lain, suatu fungsi kontinu jika grafiknya tidak memiliki lubang atau celah di dalamnya.

Untuk banyak fungsi, mudah untuk menentukan di mana ia tidak akan kontinu. Fungsi tidak akan kontinu jika kita memiliki hal-hal seperti pembagian dengan nol atau logaritma nol. Mari kita lihat sekilas beberapa contoh kekontinuan/diskontinu pada beberapa jenis fungsi.

Teorema 8.2 Teorema Limit Komposit

Jika $\lim_{x \to c} g(x) = L$ dan fungsi f kontinu pada L, maka $\lim_{x \to c} f(g(x)) = f(\lim_{x \to c} g(x)) = f(L)$.

Dengan kata lain, jika g kontinu pada c dan f kontinu pada g(c), maka fungsi komposit $f \circ g$ kontinu pada c.

Bukti (Varberg, Purcell and Rigdon, 2007)

Diberikan $\varepsilon > 0$, karena f kontinu pada L, terdapat $\delta_1 > 0$ sedemikian sehingga memenuhi

$|t - L| < \delta_1 \Rightarrow |f(t) - f(L)| < \varepsilon$

dengan asumsi $\lim_{x \to c} g(x) = L$, maka dapat ditulis

$|g(x) - L| < \delta_1 \Rightarrow |f(g(t)) - f(L)| < \varepsilon$

sedemikian sehingga untuk suatu $\delta_1 > 0$, terdapat $\delta_2 > 0$ sehingga

$0 < |x - c| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - L| < \delta_1 \Rightarrow |f(g(x)) - L| < \varepsilon$

memenuhi

$\lim_{x \to c} f(g(x)) = f(\lim_{x \to c} g(x)) = f(L)$.

8.2. Kekontinuan pada Fungsi Polinomial

Teorema 8. 3 Kekontinuan pada fungsi polinom.

Fungsi polinomial kontinu pada setiap bilangan real.

Bukti.

Misalkan f adalah polinomial berderajat n dan c adalah suatu bilangan real. Tulis

$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$

maka apabila kita cari limit dari polinomial, diperoleh

$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$

$= \lim_{x \to c} a_0x^n + \lim_{x \to c} a_1x^{n-1} + \ldots + \lim_{x \to c} a_{n-1}x + \lim_{x \to c} a_n$

$a_0c^n + a_1c^{n-1} + \cdots + a_{n-1}c + a_n = f(c)$

dengan demikian, $f(x)$ kontinu pada c.

Contoh 8.2

Jika $f(x) = \begin{cases} 2, x \leq 0 \\ ax^2 - b, 0 < x < 2. \\ x + 1, x \geq 2 \end{cases}$

Tentukan nilai a dan b agar $f(x)$ kontinu.

Penyelesaian

Perhatikan bahwa $f(x)$ pada selang $x \leq 0, 0 < x < 2,$ dan $x \geq 2$ merupakan polinom, maka menurut Teorema 8.3, fungsi $f(x)$ kontinu. Selanjutnya kita berdasarkan syarat kekontinuan kita tentukan titik-titiknya. Untuk selang $x < 0$ karena pada selang ini $f(x) = 2$ merupakan fungsi konstan, maka jelas $f(x)$ kontinu. Selanjutnya kita hanya menentukan kekontinuan di titik $x = 0$ dan $x = 2$.

Agar fungsi kontinu pada ada $x = 0$, kita cek untuk properti kekontinuannya.

1. $f(0)$ terdefinisi, yaitu $f(0) = 2$
2. $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 2$

diperoleh $ax^2 - b = 2 \Leftrightarrow a(0)^2 - b = 2 \Leftrightarrow b = -2$

Agar fungsi kontinu pada ada $x = 2$, kita cek untuk properti kekontinuannya.

1. $f(2)$ terdefinisi, yaitu $f(2) = 2 + 1 = 3$
2. $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(2) = 3$

diperoleh $ax^2 - b = 3 \Leftrightarrow a(2)^2 - b = 3$

$\Leftrightarrow 4a - b = 3$

$\Leftrightarrow 4a - (-2) = 3$

$\Leftrightarrow 4a = 1$

$\Leftrightarrow a = 1/4$

Diperoleh bahwa dengan $a = 1/4$ dan $b = -2$, maka fungsi $f(x)$ kontinu.

8.3. Kekontinuan pada Fungsi Rasional

Teorema 8. 4 Kekontinuan pada fungsi rasional.

Fungsi rasional kontinu pada setiap bilangan real a pada domain, kecuali pada penyebutnya sama dengan nol.

Berikut ini adalah contok diskontinu fungsi rasional.

Contoh 8.3

Tentukan dimana fungsi di berikut tidak kontinu.

$$h(x) = \frac{2x + 3}{x^2 - 3x - 4}$$

Penyelesaian

Fungsi rasional kontinu di mana-mana kecuali pada titik yang membuatnya memiliki pembagian dengan nol. Jadi yang perlu kita lakukan hanyalah menentukan di mana penyebutnya nol.

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 4)(x + 1) = 0$$

sehingga fungsi h diskontinu pada titik $x = 4$ dan $x = -1$.

8.4. Kekontinuan pada Fungsi Nilai Mutlak

Teorema 8. 5 Kekontinuan pada fungsi nilai mutlak.

Fungsi nilai mutlak kontinu pada setiap bilangan real c.

Seperti halnya fungsi pada umumnya, dalam penentuan kekontinuan fungsi nilai mutlak harus memenuhi syarat-syarat kekontinuan. Artinya, fungsi nilai mutlak akan kontinu di suatu titik x jika nilai fungsi pada titik tersebut sama dengan nilai limitnya saat x mendekati titik tersebut dari kedua arah, yaitu dari sebelah kiri dan kanan.(Indrawati and Sembiring, 2011)

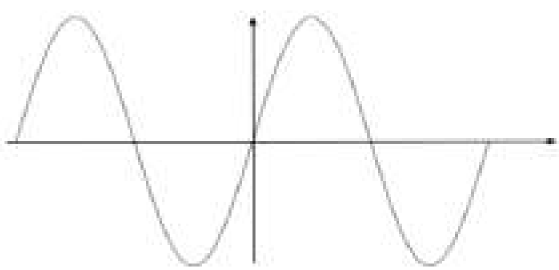
8.5. Kekontinuan pada Fungsi Trigonometri

Fungsi sin dan cos kontinu pada setiap bilangan real. Fungsi tan, cot, sec dan csc kontinu pada setiap bilangan real yang merupakan domainnya.

Perhatikan bahwa fungsi tan(x) memiliki domain sebagai berikut.

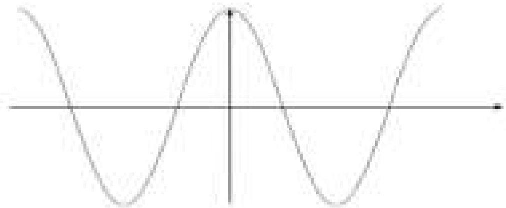
$$D_{\tan} = \left\{x, x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\right\}$$

sehingga fungsi tan(x) kontinu karena titik $\frac{(2k+1)\pi}{2}$ bukan domain dari fungsi.



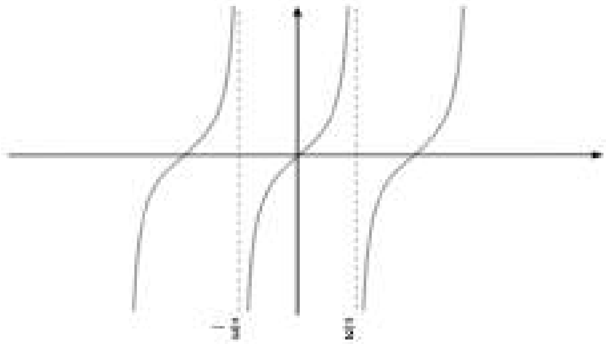
Gambar 8.3 Fungsi $\sin(x)$

(Sumber: Penulis, 2023)



Gambar 8.4 Fungsi $\cos(x)$

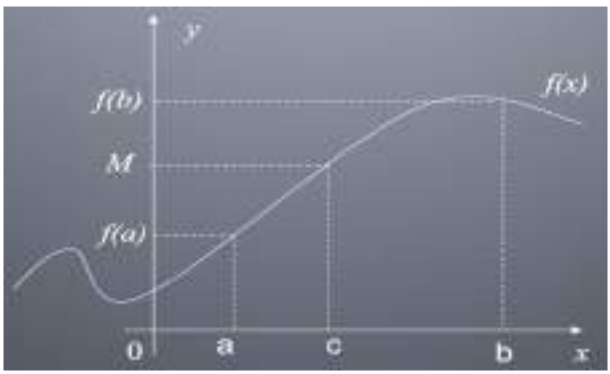
(Sumber: Penulis, 2023)



Gambar 8.5 Fungsi $\tan(x)$

(Sumber: Penulis, 2023)

Pada kekontinuan fungsi, akan diperkenalkan teorema nilai antara yang sangat populer.



Gambar 8.6 Grafik fungsi Teorema Nilai Antara

(Sumber: Kusumawinahyu, 2014)

Teorema 8.6 Teorema Nilai Antara

Misalkan f adalah fungsi yang terdefinisi pada $[a, b]$ dan M adalah nilai antara f(a) dan f(b). Jika f kontinu pada $[a, b]$, maka paling tidak terdapat suatu bilangan p dimana $a < c < b$ sedemikian sehingga $f(c) = M$. Ilustrasi Teorema ini dapat dilihat pada Gambar 8.6.

Penerapan teorema ini dapat dilihat dari skenario berikut. Diberikan suatu fungsi $f(x) = x - \cos(x)$ pada interval $[0, \pi/2]$. Misalkan $M = 0$.

Untuk $f(0) = 0 - \cos(0) = -1$ dan

$f(\pi/2) = \pi/2 - \cos(\pi/2) = \pi/2$.

Karena f kontinu pada $[0, \pi/2]$, dan $M = 0$ ada diantara $f(0)$ dan $f(\pi/2)$, maka sesuai dengan teorema nilai antara, terdapat suatu nilai c dengan $0 < c < \pi/2$, dan $f(c) = 0$ dimana merupakan suatu solusi dari $x - \cos(x) = 0$

Pilih $c = \pi/4$, yang merupakan suatu titik antara 0 dan $\pi/2$. Substitusikan pada fungsi sehingga diperoleh

$f(\pi/4) = \pi/4 - \cos(\pi/4) \approx 0{,}07829$

Dengan mengambil titik antara dua bilangan. Dengan demikian, terdapat suatu titik $0 < c < \pi/2$ sehingga $f(c) = 0$.

DAFTAR PUSTAKA

Indrawati, I. and Sembiring, C. (2011) 'Kajian Fungsi Nilai Mutlak dan Grafiknya', *Jurnal Penelitian Sains*, 14(1), p. 168396.

Kusumawinahyu, D.W.M. (2014) *KALKULUS I*. Available at: http://wmuharini.lecture.ub.ac.id/files/2014/09/BAB2_FUNGSI_LIMIT_DAN_KEKONTINUAN.pdf.

Marsden, J. and Weinstein, A. (2022) *Calculus I - Continuity*. Available at: http://tutorial.math.lamar.edu/Solutions/CalcI/Continuity/Prob1.aspx (Accessed: 1 August 2023).

Varberg, D.E., Purcell, E.J. and Rigdon, S.E. (2007) *Calculus*. 9th ed, *Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J., c2007*. 9th ed. Upper Saddle River, N.J. SE -: Pearson Prentice Hall Upper Saddle River, N.J. Available at: https://doi.org/LK - https://worldcat.org/title/1198542883.

BAB 9

INTUISI TURUNAN

Oleh Netty J. Marlin Gella, M.Si.

9.1. Definisi Turunan dan Arti Geometrinya

Pada bab sebelumnya telah dipelajari konsep limit suatu fungsi yang memiliki keterkaitan dengan konsep turunan. Limit dari perubahan rata-rata pada nilai fungsi terhadap variabel bebasnya disebut sebagai turunan. Kata lain turunan adalah diferensial.

9.1.1. Definisi Turunan

Definisi Turunan

Turunan suatu fungsi f terhadap bilangan a dengan notasi f'(a) yang didefinisikan sebagai berikut,

$$f'(a) = \lim_{j \to 0} \frac{f(a+j) - f(a)}{j}$$

jika limit ini ada (Stewart, Clegg dan Watson, 2020).

Catatan: Notasi f'(a) dibaca f aksen a

Definisi di atas merupakan turunan suatu fungsi pada suatu titik tetap a. Jika bilangan a ini berubah-ubah, maka bilangan a pada definisi di atas diganti dengan suatu variabel x dan diperoleh

$$f'(x) = \lim_{j \to 0} \frac{f(x+j) - f(x)}{j}$$

asalkan limit ini ada, sehingga f' ini menjadi suatu fungsi baru yang disebut sebagai turunan dari f atau dengan kata lain f terdiferensialkan (terturunkan) di x. Pencarian turunan disebut sebagai pendiferensialan (Varberg, Purcell dan Rigdon, 2006; Stewart, Clegg dan Watson, 2020).

Contoh 9.1

Cari turunan fungsi $f(x) = x^2 - x - 6$ terhadap $x = 2$

Penyelesaian

$$f'(2) = \lim_{j\to 0} \frac{f(2+j) - f(2)}{j}$$

$$f'(2) = \lim_{j\to 0} \frac{[(2+j)^2 - (2+j) - 6] - [2^2 - 2 - 6]}{j}$$

$$f'(2) = \lim_{j\to 0} \frac{4 + 4j + j^2 - 2 - j - 6 - 4 + 2 + 6}{j}$$

$$f'(2) = \lim_{j\to 0} \frac{j^2 + 3j}{j}$$

$$f'(2) = \lim_{j\to 0} (j + 3)$$

$$f'(2) = 3$$

Contoh 9.2

Cari turunan fungsi $f(x) = \sqrt{2x - 1}$ terhadap $x = a$ dengan $a > 0$

Penyelesaian

$$f'(2) = \lim_{j\to 0} \frac{f(2+j) - f(2)}{j}$$

$$f'(2) = \lim_{j\to 0} \frac{[(2+j)^2 - (2+j) - 6] - [2^2 - 2 - 6]}{j}$$

$$f'(2) = \lim_{j\to 0} \frac{4 + 4j + j^2 - 2 - j - 6 - 4 + 2 + 6}{j}$$

$$f'(2) = \lim_{j \to 0} \frac{j^2 + 3j}{j}$$

$$f'(2) = \lim_{j \to 0} (j + 3)$$

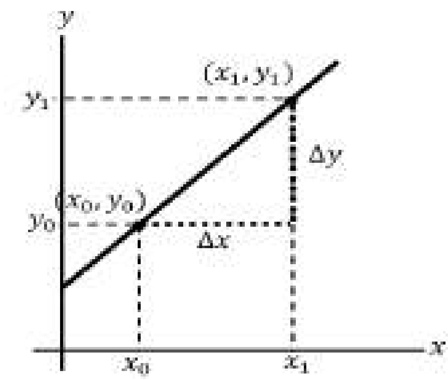
$$f'(2) = 3$$

9.1.2. Definisi Turunan secara Geometri

Secara geometris, turunan suatu fungsi dapat diartikan sebagai kemiringan grafik fungsi atau lebih tepatnya sebagai kemiringan garis singgung di suatu titik yang disebut gradien (*slope*). Garis singgung adalah garis lurus yang menyentuh kurva hanya satu kali. Prinsip gradien garis singgung berasal dari prinsip gradien garis lurus. Garis lurus yang melalui dua titik berbeda (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) ditunjukkan pada Gambar 9.1 memiliki rumus kemiringannya yaitu

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

(Hernadi, 2021).



Gambar 9.1 Garis yang Melalui Titik (x_1, y_1) **dan** (x_2, y_2)

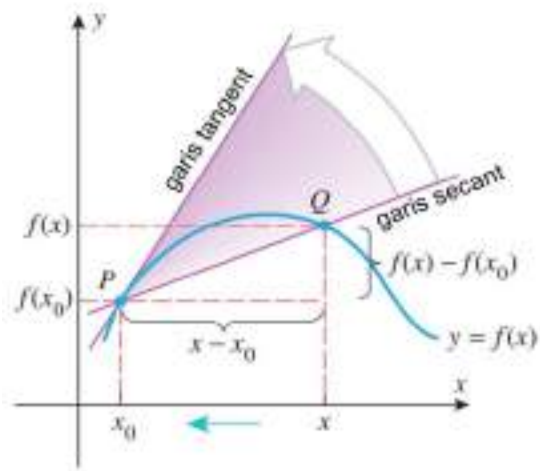
(Sumber: Hernadi, 2021)

Setelah dipahami gradien suatu garis lurus, maka dapat ditentukan kemiringan garis singgung kurva $y = f(x)$ pada titik

$P\ (x_0, f(x_0))$. Seperti yang diilustrasikan pada Gambar 9.2, diberikan juga titik $Q(x, f(x))$ pada kurva f yang berbeda dengan titik P, garis yang melalui titik P dan Q disebut garis *secant* sedangkan garis yang hanya menyentuh kurva di titik P disebut garis singgung/garis *tangent* dan titik P disebut sebagai titik singgung. Rumus gradien m_{PQ} dari garis *secant* yang melalui P dan Q adalah sebagai berikut,

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

(Anton, Bivens dan Davis, 2012).



Gambar 9.2 Kemiringan Garis Singgung Kurva $y = f(x)$ **pada Titik P** $(x_0, f(x_0))$**.**

(Sumber: Anton, Biven dan Davis, 2012)

Jika titik x digerakkan mendekati x_0, maka titik Q akan bergerak sepanjang kurva dan mendekati titik P. Jika garis *secant* yang melalui P dan Q semakin lama semakin mendekati garis singgung dengan $x \to x_0$, maka posisi tersebut dianggap sebagai posisi garis singgung di P . Dengan kata lain, gradien garis singgung di P adalah aproksimasi gradien pada garis *secant* mendekati garis singgung/garis *tangent* dengan $x \to x_0$ (Anton, Bivens dan Davis, 2012; Stewart, Clegg dan Watson, 2020).

Definisi Gradien Garis Singgung

Garis singgung pada kurva $y = f(x)$ di titik $P(x_0, f(x_0))$ adalah sebuah garis yang melalui P dengan kemiringan/gradien

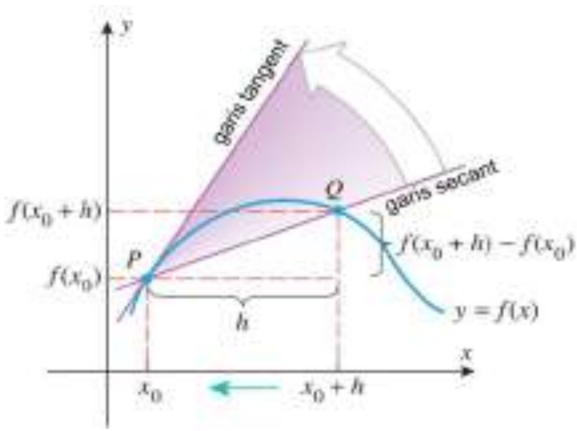
$$m = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

asalkan limit ini ada (Stewart, Clegg dan Watson, 2020).

Terdapat rumus kemiringan garis singgung lain yang umumnya digunakan. Misalkan $j = x - x_0$ maka $x = x_0 + j$, sehingga ketika $x \to x_0$ ekuivalen dengan $j \to 0$ (yang ditunjukkan pada Gambar 9.3), rumus gradien garis singgung pada Definisi Gradien Garis Singgung menjadi

$$m = \lim_{j \to 0} \frac{f(x_0 + j) - f(x_0)}{j}$$

(Anton, Bivens dan Davis, 2012; Stewart, Clegg dan Watson, 2020) .



Gambar 9.3 Gradien Garis Tangent sebagai Limit dari Garis Secant

(Sumber: Anton, Biven dan Davis, 2012)

Contoh 9.3

Hitunglah kemiringan garis singgung parabola $y = f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ pada titik-titik singgung $(-1,2)$ dan $(2,56)$.

Penyelesaian

Untuk mencari kemiringan garis singgung pada dua titik singgung yang diberikan maka, lebih efisien menghitung kemiringan garis singgung di titik umum $(a, f(a))$, selanjutnya untuk mendapat kemiringan dari dua titik singgung dilakukan substitusi. Untuk $x = a$, maka $f(a) = 3a^2 + 2a + 1$

$$m = \lim_{j \to 0} \frac{f(a+j) - f(a)}{j}$$

$$= \lim_{j \to 0} \frac{[3(a+j)^2 + 2(a+j) + 1] - [3a^2 + 2a + 1]}{j}$$

$$= \lim_{j \to 0} \frac{[3(a^2 + 2aj + j^2) + 2a + 2j + 1] - 3a^2 - 2a - 1}{j}$$

$$= \lim_{j \to 0} \frac{3a^2 + 6aj + 3j^2 + 2a + 2j + 1 - 3a^2 - 2a - 1}{j}$$

$$= \lim_{j \to 0} \frac{6aj + 3j^2 + 2j}{j}$$

$$= \lim_{j \to 0} 6a + 3j + 2$$

$$= 6a + 2$$

Jadi,

- Titik singgung $(-1,2)$, diperoleh $a = -1$, sehingga kemiringan garis singgungnya adalah $m = 6(-1) + 2 = -6 + 2 = -4$.

- Titik singgung (2,56), diperoleh $a = 2$, sehingga kemiringan garis singgungnya adalah $m = 6(2) + 2 = 12 + 2 = 14$.

9.2. Turunan Pertama

Turunan pertama sering juga disebut turunan orde pertama yang dapat diartikan sebagai laju perubahan sesaat. Hal ini akan dibahas pada sub bab 2.4. Turunan pertama dari suatu fungsi $f(x)$, yaitu $f'(x)$ artinya dilakukan turunan fungsi f terhadap x, hanya satu kali.

9.2.1. Notasi Turunan

Beberapa notasi yang digunakan untuk menyatakan turunan, salah satunya dengan menggunakan notasi Leibniz. Diberikan $y = f(x)$, maka turunan fungsi $f(x)$ terhadap x dinotasikan sebagai berikut,

$$f'(x) = y' = \frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\big(f(x)\big) = \frac{d}{dx}(y) = Df(x) = D_x f(x)$$

Simbol D dan $\frac{d}{dx}$ disebut operator turunan (diferensial) sedangkan simbol $\frac{d}{dx}$ dikenal sebagai notasi Leibniz. Dalam notasi Leibniz, definisi turunan dapat ditulis dalam bentuk

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Jika akan ditunjukkan nilai turunan pada titik x_o dapat ditulis dalam bentuk,

$$f'(x_0) = y'(x_0) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_o} = \left.\frac{d}{dx}\big(f(x)\big)\right|_{x=x_o} = Df(x_0)$$
$$= D_x f(x)|_{x=x_o}$$

(Varberg, Purcell dan Rigdon, 2006; Anton, Bivens dan Davis, 2012; Stewart, Clegg dan Watson, 2020).

9.2.2. Rumus Turunan

Pada bagian ini, akan disajikan beberapa rumus yang telah dikembangkan untuk mencari turunan dari banyak fungsi tanpa harus menggunakan definisi turunan secara langsung.

1. Turunan Fungsi Konstanta
   Jika fungsi konstanta $f(x) = c$ untuk setiap x dengan c sebarang bilangan real, maka
   $$\frac{d}{dx}(c) = 0$$
2. Aturan Pangkat
   Jika r sebarang bilangan real, maka
   $$\frac{d}{dx}(x^r) = r(x^{r-1})$$
   Dengan kata lain, untuk mencari turunan fungsi pangkat, maka kurangi eksponen konstanta dengan satu dan kalikan fungsi pangkat yang dihasilkan dengan eksponen aslinya.
3. Aturan Jumlah
   Jika fungsi f dan g adalah fungsi yang dapat diturunkan/ didiferensialkan, maka
   $$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] + \frac{d}{dx}[g(x)]$$
   Dengan kata lain, turunan dari suatu jumlah sama dengan jumlah turunannya.
4. Aturan Selisih
   Jika fungsi f dan g adalah fungsi yang dapat diturunkan/ didiferensialkan, maka
   $$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] - \frac{d}{dx}[g(x)]$$
   Dengan kata lain, turunan dari suatu selisih sama dengan selisih turunannya.
5. Aturan Perkalian Konstanta

Jika f fungsi yang dapat diturunkan/ didiferensialkan dan konstanta c sebarang bilangan real, maka

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}[f(x)]$$

Dengan kata lain, faktor konstanta dapat dipindahkan sebelum simbol turunan.

6. Aturan Hasil Kali

   Jika fungsi f dan g adalah fungsi yang dapat diturunkan/ didiferensialkan, maka

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}[f(x)]$$

   Dengan kata lain, turunan dari hasil kali dua fungsi adalah fungsi pertama dikalikan turunan dari fungsi kedua ditambah fungsi kedua dikalikan turunan fungsi pertama.

7. Aturan Hasil Bagi

   Jika fungsi f dan g adalah fungsi yang dapat diturunkan/ didiferensialkan dan $g(x) \neq 0$, maka

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}$$

Dengan kata lain, turunan dari hasil bagi dua fungsi adalah penyebut dikalikan dengan turunan pembilang dikurangi pembilang dikalikan dengan turunan penyebut, semuanya dibagi dengan kuadrat penyebut (Varberg, Purcell dan Rigdon, 2006; Anton, Bivens dan Davis, 2012; Stewart, Clegg dan Watson, 2020).

Contoh 9.4

Tentukan turunan dari fungsi-fungsi berikut,

1. $y = x\sqrt{x} - 2x + 5$
2. $y = \frac{x-2}{x^4}$
3. $y = (x^2 - 2x - 8)(x^{-3} + 9)$

Penyelesaian

1. $\sqrt{x}$ diubah ke dalam bentuk pangkat sehingga fungsi

$$y = x\sqrt{x} - 2x + 5 = xx^{\frac{1}{2}} - 2x + 5 = x^{\frac{3}{2}} - 2x + 5$$

Selanjutnya, digunakan aturan pangkat, perkalian konstanta dan turunan fungsi konstanta,

$$y' = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} - 2x^{1-1} + 0 = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 2x^{0} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 2(1)$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{x} - 2$$

2. Untuk mencari turunan dari $y = \frac{x-2}{x^4}$, digunakan aturan hasil bagi, aturan pangkat, turunan fungsi konstanta dan aturan selisih,

$$y' = \frac{x^4\left(\frac{d}{dx}(x-2)\right) - (x-2)\left(\frac{d}{dx}(x^4)\right)}{[x^4]^2}$$

$$y' = \frac{x^4\left(\frac{d}{dx}(x) - \frac{d}{dx}(2)\right) - (x-2)\left(\frac{d}{dx}(x^4)\right)}{[x^4]^2}$$

$$y' = \frac{x^4(1-0) - (x-2)(4x^{4-1})}{x^{4(2)}}$$

$$y' = \frac{x^4(1) - (x-2)(4x^3)}{x^8}$$

$$y' = \frac{x^4 - (4x^4 - 8x^3)}{x^8}$$

$$y' = \frac{x^4 - 4x^4 + 8x^3}{x^8}$$

$$y' = \frac{-3x^4 + 8x^3}{x^8}$$

$$y' = \frac{(-3x+8)x^3}{x^8}$$

$$y' = \frac{-3x+8}{x^5}$$

3. Untuk mencari turunan dari $y = (x^2 - 2x - 8)\ (x^{-3} + 9)$, digunakan aturan hasil kali, aturan pangkat, aturan selisih dan jumlah, aturan perkalian konstanta serta turunan fungsi konstanta,

$$y' = (x^2 - 2x - 8)\frac{d}{dx}(x^{-3} + 9) + (x^{-3} + 9)\frac{d}{dx}(x^2 - 2x - 8)$$

$$y' = (x^2 - 2x - 8)\left(\frac{d}{dx}(x^{-3}) + \frac{d}{dx}(9)\right) + (x^{-3} + 9)\left(\frac{d}{dx}(x^2) - \frac{d}{dx}(2x) - \frac{d}{dx}(8)\right)$$

$$y' = (x^2 - 2x - 8)(-3x^{-3-1} + 0) + (x^{-3} + 9)(2x^{2-1} - 2 - 0)$$
$$y' = (x^2 - 2x - 8)(-3x^{-4}) + (x^{-3} + 9)(2x - 2)$$
$$y' = -3x^{-2} + 6x^{-3} + 24x^{-4} + 2x^{-2} + 18x - 2x^{-3} - 18$$
$$y' = 24x^{-4} + 6x^{-3} - 2x^{-3} - 3x^{-2} + 2x^{-2} + 18x - 18$$
$$y' = 24x^{-4} + 4x^{-3} - x^{-2} + 18x - 18$$

9.3. Persamaan Garis Singgung

Kemiringan persamaan garis singgung $f(x)$ pada titik $(a, f(a))$ adalah $m = f'(a)$. Persamaan garis singgung dapat disajikan dalam bentuk,

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

(Anton, Bivens dan Davis, 2012; Stewart, Clegg dan Watson, 2020).

Contoh 9.5

Carilah persamaan garis singgung parabola $y = x^2 - x + 12$ di titik (2,-10).

Penyelesaian

Untuk mencari turunan dari f'(x) digunakan aturan pencarian turunan, maka

$$f^{'}(x) = 2x - 1$$

Sehingga kemiringan garis singgung parabola y pada titik $x = a = 2$ dengan $f(a) = f(2) = -10$ adalah

$$f^{'}(2) = 2(2) - 1 = 4 - 1 = 3$$

Dan persamaan garis singgungnya pada titik (2,-10) adalah

$$y = -10 + 3(x - 2)$$

$$y = -10 + 3x - 6$$

$$y = 3x - 16$$

9.4. Kecepatan Rata-Rata dan Kecepatan Sesaat

Kecepatan adalah turunan/derivatif dari fungsi jarak. Pada bab ini akan dibahas tentang kecepatan rata-rata dan kecepatan sesaat. Misalnya, sebuah mobil melakukan perjalanan dengan jarak 200 km selama 4 jam, diketahui kecepatan rata-rata mencapai 50 km/jam. Namun, selama perjalanan tersebut kondisi yang mungkin terjadi yaitu saat kecepatan lebih dari 50 km/jam dan berhenti di lampu lalu lintas. Jadi, selama perjalanan tidak hanya memiliki kecepatan rata-rata tetapi juga kecepatan sesaat (yaitu kecepatan sesaat yang ditampilkan pada *speedometer*) sehingga kecepatan rara-rata berkaitan dengan kecepatan sesaat (Harshbarger dan Reynolds, 2018).

Jika $y = s(t)$ menyatakan jarak/lintasan yang ditempuh oleh objek bergerak maka kecepatan rata-rata pada dua titik adalah adalah perubahan posisi atau perpindahan (Δs) dibagi selang waktu (Δt) terjadinya perpindahan,

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Misalkan $t_1 = t$ dan $t_2 = t + \Delta t$ dan disubstitusi ke persamaan kecepatan rata-rata serta mengambil batasnya sebagai $\Delta t \to 0$, maka kecepatan sesaat pada sebarang titik adalah

$$v_{sesaat} = v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt} s(t)$$

Dengan kata lain kecepatan sesaat suatu benda adalah batas kecepatan rata-rata ketika waktu selama objek bergerak mendekati nol, atau turunan dari $s(t_0)$ terhadap t saat $t = t_0$ (Anton, Bivens dan Davis, 2012; Harshbarger dan Reynolds, 2018).

Contoh 9.6

Posisi sebuah objek bergerak diberikan oleh persamaan $s = f(t) = 3t + t^3$ meter. Hitunglah kecepatan sesaat saat $t = 2$ detik dan kecepatan rata-rata pada saat 1 detik sampai dengan 3 detik.

Penyelesaian

Kecepatan sesaat, $v_{sesaat} = v(t) = f^{'}(t) = 3 + 3t^2$

Mengantikan $t = 2$ pada persamaan $v(t) = 3 + 3t^3$

$v(2) = 3 + 3(2)^2 = 3 + 3(4) = 3 + 12 = 15$ m/detik

Kecepatan rata-rata dengan $t_1 = 1$ detik dan $t_2 = 3$ detik,

$$\bar{v} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{[3(2) + 2^3] - [3(1) + 1^3]}{2}$$

$$= \frac{14 - 4}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ meter/detik}$$

9.5. Soal Latihan

1. Jika diberikan fungsi $f(x) = \frac{5x}{1+3x}$,
   a. Carilah gradien garis singgung kurva $y = f(x)$ di titik singgung $(-2,2)$, $(0,0)$ dan $\left(1, \frac{5}{4}\right)$

b. Tentukan persamaan garis singgung pada kurva $y = f(x)$ di titik-titik yang diberikan pada bagian a.
c. Gambarkanlah kurva $y = f(x)$ berserta garis-garis singgung yang ditemukan pada bagian b.

2. Tentukan persamaan garis singgung pada kurva di tiik yang diberikan
   a. $y = xy, \quad (2,6)$
   b. $y = \frac{2x\sqrt{x}}{x^2-8}, \quad (4,2)$
   c. $y = \frac{x+4}{x-6}, \quad (8,6)$
   d. $y = 3x^2 - x - 2, \quad (0,-2)$
3. Carilah turunan fungsi berikut ini dengan menggunakan definisi turunan fungsi,
   a. $f(x) = 7x - 2$
   b. $f(x) = \frac{5-3x}{1+x}$
   c. $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x+1}-(x+2)}$
   d. $f(x) = x^2 + x\sqrt{x}$
4. Carilah turunan pertama dari fungsi-fungsi berikut ini menggunakan rumus turunan.
   a. $f(x) = x^{-\frac{5}{2}} + x^2 - 2x$
   b. $w(v) = \frac{3}{4}v^{-16} - \frac{1}{v}$
   c. $h(x) = (2x + 5)\sqrt{x}$
   d. $g(t) = \frac{\sqrt{t}+3}{\sqrt{t}}$
   e. $f(x) = (2 - x^2)(x^3 - 6x + 11)$
   f. $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$
   g. $y = \sqrt[3]{\frac{10}{x}}$
   h. $h(x) = ax^3 + bx^2 - cx^{-1} + d$, dengan a, b, c, d konstanta

i. $g(t) = \frac{a-t^2}{b+t}$, dengan a, b konstanta

j. $y = \pi^5$

5. Carilah $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}$ dari

a. $y = 1 - 3x - 2x^2$

b. $y = 2x + \frac{1}{x}$

c. $y = \frac{x^{20}+2x^{15}+3x^{10}+4x^5+5x+6}{x}$

d. $y = (1 - 2x)(1 + 2x)$

6. Diberikan $f(x) = x^{-3}g(x)$, dengan $g(3) = 18$ dan $g'(3) = 12$. Carilah $f'(3)$.

7. Diberikan sebuah kurva $y = f(x)$, tuliskanlah bentuk ekspresi matematika gradien dari garis secant yang memalui titik $A(-1, f(-1))$ dan $B(x, f(x))$ serta persamaan garis singgung/tangent pada titik A.

8. Carilah fungsi $ax^2 + bx + c$ yang kurvanya mempunyai persamaan garis singgung mendatar di titik (-2,-11).

9. Suatu partikel bergerak dengan membentuk fungsi $s(t) = 5 - 6t + 2t^2$ dengan jarak s diukur dalam meter dan t dalam menit. Carilah kecepatan pada saat $t = 1{,}5$ dan kecepatan rata-rata saat $2 \leq t \leq 7$.

10. Sebuah batu dijatuhkan ke tanah dari ketinggian 256 meter. Tinggi batu setelah t detik adalah $h(t) = 4t^2$ meter.

a. Tentukan kecepatan batu setelah satu detik.

b. Tentukan kecepatan rata-rata pada saat $3 \leq t \leq 7$.

c. Kapan batu tersebut menyentuh tanah?

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H., Bivens, I. dan Davis, S. (2012) *Calculus*. 10th ed. New Jersey: John Willey & Sons, Inc.

Harshbarger, R.J. dan Reynolds, J.J. (2018) *Mathematical Applications for The Management, Life and Social Sciences*. New Jersey: Cengage Learning Inc.

Hernadi, J. (2021) *Kalkulus 1*. Jakarta: Penerbit Erlangga.

Stewart, J., Clegg, D. dan Watson, S. (2020) *Calculus Early Transscendentals Ninth Edition*. Boston: Cengage Learning Inc.

Varberg, D., Purcell, E.J. dan Rigdon, S.E. (2006) *Calculus 9th Edition*. New York: Pearson.

BAB 10

TURUNAN (I)

Oleh Asri Nurhafsari, S.Pd., M.Pd.

10.1. Turunan Fungsi Trigonometri

Pada dasarnya untuk mencari turunan fungsi trigonometri akan berkaitan dengan penggunaan rumus dasar turunan dan aturannya seperti yang dijelaskan di bab 9. Soal-soal yang berkaitan dengan turunan fungsi trigonometri juga biasanya dikombinasikan dengan fungsi lainnya seperti fungsi aljabar, logaritma, maupun eksponensial. Dalam bagian ini akan diuraikan rumus untuk turunan fungsi trigonometri dan beberapa contoh soal beserta penyelesaiannya.

Rumus Turunan Fungsi Trigonometri

Jika f(x) atau y merupakan suatu fungsi trigonometri, maka f'(x) atau y' adalah turunan pertamanya. Ingat kembali bahwa notasi turunan tidak hanya $f'(x)$ maupun y' tapi dapat juga dalam bentuk notasi lain (lihat bab 9).

Perhatikan rumus berikut ini.

- $y = \sin x$, maka $y' = \cos x$
- $y = \cos x$, maka $y' = -\sin x$
- $y = \tan x$, maka $y' = \sec^2 x$
- $y = \cot x$, maka $y' = -\mathrm{cosec}^2 x$
- $y = \sec x$, maka $y' = \sec x \tan x$

- $y = \text{cosec } x$, maka $y' = -\text{cosec } x \cot x$

(Yahya, Suryadi and Agus, 2014; Ratnadewi *et al.*, 2016; Pinem, 2017)

Contoh 10.1

Carilah turunan pertama dari fungsi trigonometri berikut ini.

a. $f(x) = 4 \sin x - \frac{1}{3} \cos x$
b. $y = 3x^2 - 5 \tan x$

Penyelesaian:

a. $f(x) = 4 \sin x - \frac{1}{3} \cos x$
   Soal ini dapat diselesaikan langsung dengan menggunakan rumus turunan fungsi trigonometri di atas, sehingga
   $f'(x) = 4 \cos x - \frac{1}{3}(-\sin x)$
   $= 4 \cos x + \frac{1}{3} \sin x$
b. $y = 3x^2 - 5 \tan x$
   Untuk menyelesaikan soal ini dapat menggunakan rumus aturan pangkat dan turunan fungsi trigonometri sehingga
   $y' = 3 \cdot 2x^{2-1} - 5 \sec^2 x$
   $= 6x - 5 \sec^2 x$

Contoh 10.2

Carilah turunan pertama dari fungsi trigonometri berikut ini.

a. $y = \frac{8 \sin t}{2\sqrt{t^3}}$
b. $f(x) = 6 \sec x \cdot \sin x$

Penyelesaian:

a. Untuk menyelesaikan $y = \frac{7 \sin t}{2\sqrt{t^3}}$, digunakan aturan hasil bagi, aturan pangkat dan rumus turunan trigonometri

$$y = \frac{8\sin t \rightarrow u}{2\sqrt{t^3} \rightarrow v}$$

Misalkan:

$u = 8\sin t$, maka $u' = 8\cos t$

$v = 2\sqrt{t^3} = 2t^{\frac{3}{2}}$, maka $v' = 2 \cdot \frac{3}{2} t^{\frac{3}{2}-1} =$

dengan menggunakan rumus $y' = \frac{u'v - u\,v'}{v^2}$ sehingga

$$y' = \frac{8\cos t \cdot 2t^{\frac{3}{2}} - 8\sin t \cdot 3t^{\frac{1}{2}}}{\left(2t^{\frac{3}{2}}\right)^2}$$

$$= \frac{16\,t^{\frac{3}{2}}\cos t - 24t^{\frac{1}{2}}\sin t}{4t^3}$$

$$= \frac{4t^{\frac{1}{2}}(4t\cos t - 6\sin t)}{4t^3}$$

$$= \frac{4t\cos t - 6\sin t}{t^{\frac{5}{2}}}$$

$$= \frac{4t\cos t - 6\sin t}{t^2\sqrt{t}}$$

b. Untuk menyelesaikan soal $f(x) = 6\sec x \cdot \sin x$ dapat menggunakan aturan hasil kali atau dengan cara mengubah persamaan dengan menggunakan identitas trigonometri.

Cara 1

$$f(x) = \underbrace{6\sec x}_{u} \cdot \underbrace{\sin x}_{v}$$

Misalkan:

$u = 6\sec x$, maka $u' = 6\sec x\ \tan x$

$v = \sin x$, maka $v' = \cos x$

Sehingga $f'(x) = u'v + u\,v'$

$$f'(x) = 6\sec x\ \tan x \cdot \sin x + 6\sec x \cdot \cos x$$

$$= 6\sec x\ (\tan x \cdot \sin x + \cos x)$$

$$= 6 \sec x \left(\frac{\sin x}{\cos x} \sin x + \cos x\right)$$
$$= 6 \sec x \left(\frac{\sin^2 x}{\cos x} + \cos x\right)$$
$$= 6 \sec x \left(\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x}\right)$$
$$= 6 \sec x \left(\frac{1}{\cos x}\right)$$
$$= 6 \sec x \cdot \sec x$$
$$= 6 \sec^2 x$$

Ingat kembali!

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$\sec x = \frac{1}{\cos x}$

Cara 2

dengan menggunakan rumus identitas trigonometri maka

$$f(x) = 6 \sec x \cdot \sin x$$
$$= 6 \frac{1}{\cos x} \cdot \sin x$$
$$= 6 \frac{\sin x}{\cos x}$$
$$= 6 \tan x$$

karena $f(x) = 6 \tan x$, maka $f'(x) = 6 \sec^2 x$

Contoh 10.3

Jika diketahui $y = \frac{3 \sin t - 2 \cos t}{4 \sin t}$, maka y' adalah ...

Penyelesaian

Untuk menyelesaikan $y = \frac{3 \sin t - 2 \cos t}{4 \sin t}$, kita perlu mengubah bentuknya agar menjadi persamaan yang lebih sederhana.

$$y = \frac{3 \sin t - 2 \cos t}{4 \sin t}$$
$$= \frac{3 \sin t}{4 \sin t} - \frac{2 \cos t}{4 \sin t}$$
$$= \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \cot t$$

Ingat!

cotan $x =$
$\cos x$

Karena $y = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \cot t$, maka turunannya dapat langsung dicari menggunakan rumus turunan fungsi konstanta dan turunan fungsi trigonometri, sehingga

$$y' = 0 - \frac{1}{2} \cdot (-\text{cosec}^2 t)$$
$$= -\frac{1}{2} \cdot (-\text{cosec}^2\ t)$$
$$= \frac{1}{2}\, \text{cosec}^2 t$$

Jadi y' nya adalah $\frac{1}{2}\text{cosec}^2 t$

Contoh 10.4

Jika $f(a) = \frac{\sin a}{1+\cos a} + \frac{\sin a}{1-\cos a}$, maka nilai $f'\left(\frac{1}{4}\pi\right)$ adalah ...

Penyelesaian:

Untuk menyelesaikan soal ini kita perlu menyamakan penyebut terlebih dahulu kemudian ada beberapa rumus identitas trigonometri yang perlu dipakai.

$$f(a) = \frac{\sin a}{1+\cos a} + \frac{\sin a}{1-\cos a}$$
$$= \frac{\sin a(1-\cos a)}{(1+\cos a)(1-\cos a)} + \frac{\sin a(1+\cos a)}{(1+\cos a)(1-\cos a)}$$
$$= \frac{\sin a(1-\cos a)+\sin a(1+\cos a)}{(1+\cos a)(1-\cos a)}$$
$$= \frac{\sin a-\sin a\cos a+\sin a+\sin a\cos a}{(1-\cos^2 a)}$$
$$= \frac{2\sin a}{(1-\cos^2 a)}$$
$$= \frac{2\sin a}{\sin^2 a} = \frac{2}{\sin a} = 2\,\text{cosec}\, a$$

Ingat!

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$sin^2 x = 1 - cos^2 x$

$\text{cosec}\, x = \frac{1}{\sin x}$

Karena $f(a) = 2\,\text{cosec}\, a$ maka $f'(a) = -2\,\text{cosec}\, a\ \cot a$, sehingga

$$f'\left(\frac{1}{4}\pi\right) = -2\,\text{cosec}\left(\frac{1}{4}\pi\right) \cdot \cot\left(\frac{1}{4}\pi\right)$$
$$= -2 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot 1 = \frac{-4}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}$$

Jadi nilai dari $f'\left(\frac{1}{4}\pi\right)$ adalah $-2\sqrt{2}$.

Selain beberapa contoh di atas, sebenarnya masih banyak lagi soal yang dapat dieksplorasi dari turunan fungsi trigonometri. Intinya ketika menghadapi permasalahan terkait turunan fungsi trigonometri biasanya kita akan menggunakan beberapa rumus-rumus trigonometri agar lebih mudah dalam penyelesaiannya. Jadi, rumus-rumus trigonometri memang wajib untuk diingat kembali.

10.2. Aturan Rantai

Aturan rantai adalah aturan yang dipakai untuk menyelesaikan suatu turunan fungsi komposisi. Dengan menggunakan aturan rantai kita dapat menyelesaikan turunan dengan melakukan pemecahan komposisi fungsi menjadi peubah lain.

Teorema:

Andaikan terdapat fungsi $y = f(u)$ dan $u = g(x)$. Jika g terdiferensialkan di x dan f terdiferensialkan di $u = g(x)$, maka fungsi komposisi $y = f(g(x))$ dapat terdiferensialkan atau dapat diturunkan di titik x dan berlaku:

$$D_x(f(g(x)) = f'(g(x))\, g'(x)$$

atau

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

atau

$$\underbrace{y'(x) = y'(u)}_{\text{Aturan rantai Leibniz}} \cdot u'(x)$$

(Purcell, Varberg and Rigdon, 2004; Ratnadewi *et al.*, 2016; Stewart, Clegg and Watson, 2021)

Contoh 10. 5

Carilah turunan pertama dari fungsi berikut ini

a. $y = (x^3 - 2x^2 + 3x - 1)^7$

b. $y = (\sqrt[3]{x} - 5)^4$

Penyelesaian

a. Untuk menyelesaikan $y = (x^3 - 2x^2 + 3x - 1)^7$ kita dapat melakukan pemisalan terlebih dahulu.

Misal: $u = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ sehingga $y = u^7$

$\frac{du}{dx} = 3x^2 - 4x + 3$ $\frac{dy}{du} = 7u^6$

Kemudian cari y' dengan rumus aturan rantai

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$y' = 7u^6 \cdot (3x^2 - 4x + 3)$$

$$= 7(3x^2 - 4x + 3)\, u^6$$ *masukkan nilai u sesuai pemisalan*

$$= (21x^2 - 28x + 21)\,(x^3 - 2x^2 + 3x - 1\,)^6$$

b. Soal ini dapat diselesaikan dengan aturan rantai namun perlu mengubah bentuk akar menjadi pangkat agar lebih mudah.

Misal: $u = \sqrt[3]{x} - 5 = x^{\frac{1}{3}} - 5$ sehingga $y = u^4$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ $\frac{dy}{du} = 4u^3$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= 4u^3 \cdot \left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\right)$$

$$= \frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}}\, u^3$$ *masukkan nilai u sesuai pemisalan*

$$= \frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}}\left(\sqrt[3]{x} - 5\right)^3$$

$$= \frac{4}{3x^{\frac{2}{3}}}(\sqrt[3]{x} - 5)^3 = \frac{4}{3\sqrt[3]{x^2}}(\sqrt[3]{x} - 5)^3$$

Contoh 10. 6

a. Jika diketahui $h(m) = \sqrt{m + \sqrt{m}}$ maka nilai $h'(1)$ adalah...

b. Jika $f(x) = \frac{6}{\sqrt[3]{(x^2-2x)^2}}$, maka nilai dari $f'(4) = \cdots$

Penyelesaian

a. Untuk menyelesaikan soal ini kita dapat melakukan pemisalan, ubah bentuk akar menjadi bentuk pangkat kemudian selesaikan dengan aturan rantai.

$$h(m) = \sqrt{m + \sqrt{m}} = (m + m^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$$

Misal: $u = m + \sqrt{m} = m + m^{\frac{1}{2}}$ sehingga $h(m) = u^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{du}{dm} = 1 + \frac{1}{2}m^{-\frac{1}{2}} \qquad \frac{d\,h(m)}{du} = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}$$

Kemudian masukkan rumus aturan rantai

$$h'(m) = \frac{d\,h(m)}{dm} = \frac{d\,h(m)}{du} \cdot \frac{du}{dm}$$

$$= \left(\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2}m^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2\sqrt{u}}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{m}}\right)$$ *masukkan nilai u sesuai pemisalan*

$$= \left(\frac{1}{2\sqrt{m+\sqrt{m}}}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{m}}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2\sqrt{m+\sqrt{m}}}\right) \cdot \left(\frac{2\sqrt{m}+1}{2\sqrt{m}}\right)$$

$$= \frac{2\sqrt{m}+1}{(2\sqrt{m+\sqrt{m}}) \cdot 2\sqrt{m}}$$

$$= \frac{2\sqrt{m}+1}{4\sqrt{m(m+\sqrt{m})}}$$

$$= \frac{2\sqrt{m}+1}{4\sqrt{m^2+m\sqrt{m}}}$$

Selanjutnya mencari nilai dari $h'(1)$

$$h'(1) = \frac{2\sqrt{1}+1}{4\sqrt{1^2+1\sqrt{1}}}$$

$$= \frac{3}{4\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4 \cdot 2} = \frac{3}{8}\sqrt{2}$$

Jadi nilai dari $h'(1)$ adalah $\frac{3}{8}\sqrt{2}$

b. Untuk menyelesaikan soal ini kita dapat menggunakan langkah yang sama seperti pada penyelesaian soal 10.6a di atas.

$$f(x) = \frac{6}{\sqrt[3]{(x^2-2x)^2}} = 6(x^2 - 2x)^{-\frac{2}{3}}$$

Misal: $u = x^2 - 2x$ sehingga $f(x) = 6u^{-\frac{2}{3}}$

$$\frac{du}{dx} = 2x - 2 \qquad \frac{d\,f(x)}{du} = 6\left(-\frac{2}{3}\right)u^{-\frac{5}{3}} = -4u^{-\frac{5}{3}}$$

Kemudian masukkan rumus aturan rantai

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{df(x)}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -4u^{-\frac{5}{3}} \cdot (2x - 2) \\ &= -4(2x - 2)(x^2 - 2x)^{-\frac{5}{3}} \\ &= (-8x + 8)(x^2 - 2x)^{-\frac{5}{3}} \end{aligned}$$

Selanjutnya mencari nilai dari $f'(4)$

$$\begin{aligned} f'(4) &= (-8 \cdot 4 + 8)(4^2 - 2 \cdot 4)^{-\frac{5}{3}} \\ &= (-24)(8)^{-\frac{5}{3}} \\ &= (-24)(2^3)^{-\frac{5}{3}} \\ &= (-24) \cdot 2^{-5} \\ &= -\frac{24}{2^5} = -\frac{24}{32} = -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

Jadi nilai dari $f'(4)$ adalah $-\frac{3}{4}$

Selain beberapa contoh di atas, aturan rantai juga dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan pada turunan fungsi trigonometri. Berikut ini beberapa contoh soalnya.

Contoh 10. 7

Tentukan turunan pertama dari fungsi $y = 5 \cot\left(\frac{3}{4}x^2 - 2\right)$.

Penyelesaian:

Misal: $u = \frac{3}{4}x^2 - 2$ sehingga $y = 5 \cot u$

$\frac{du}{dx} = \frac{3}{2}x$ $\frac{dy}{du} = 5\,(-\text{cosec}^2 u) = -5\,\text{cosec}^2 u$

Kemudian masukkan ke dalam rumus aturan rantai

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= -5\,\text{cosec}^2 u \cdot \left(\frac{3}{2}x\right)$$

$$= -\frac{15}{2}x \cdot \text{cosec}^2 u$$

$$= -\frac{15}{2}x \cdot \text{cosec}^2\,(\frac{3}{4}x^2 - 2)$$

Contoh 10. 8

Tentukan turunan pertama dari fungsi $y = \cos\left(\frac{3t^2}{t+2}\right)$.

Penyelesaian:

Untuk menyelesaikan soal ini kita perlu menggunakan aturan rantai dan juga aturan hasil bagi. Pemisalan yang dilakukan dapat menggunakan variabel yang berbeda agar lebih memudahkan.

Misal : $a = \frac{3t^2}{t+2}$ sehingga $y = \cos a$

Untuk mencari $\frac{da}{dt}$ atau a', dapat menggunakan rumus aturan hasil bagi. $\frac{dy}{da} = -\sin a$

misal : $u = 3t^2$, $u' = 6t$

$v = t + 2$, $v' = 1$

$$\frac{da}{dt} = a' = \frac{u'v - u\,v'}{v^2}$$

$$= \frac{6t(t+2) - 1 \cdot 3t^2}{(t+2)^2}$$

$$= \frac{(6t^2 + 12t) - 3t^2}{(t+2)^2} = \frac{3t^2 + 12t}{(t+2)^2}$$

Setelah itu masukkan ke dalam rumus aturan turunan.

$$y' = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{da} \cdot \frac{da}{dt}$$

$$= -\sin a \cdot \left(\frac{3t^2+12t}{(t+2)^2}\right)$$

$$= -\frac{3t^2+12t}{(t+2)^2}\ \sin a$$ *masukkan nilai a sesuai pemisalan*

$$= -\frac{3t^2+12t}{(t+2)^2}\ \sin\left(\frac{3t^2}{t+2}\right)$$

Contoh 10.9

Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi $y = 2\sin^4(x^3 - 5x^2 + 3)$.

Penyelesaian:

Untuk menyelesaikan soal ini kita perlu menggunakan aturan rantai lebih dari satu kali.

$y = 2\sin^4(x^3 - 5x^2 + 3) = 2(\sin(x^3 - 5x^2 + 3))^4$

Misal : $u = \sin(x^3 - 5x^2 + 3)$ sehingga $y = 2u^4$

$\frac{dy}{du} = 8u^3$

Untuk mencari $\frac{du}{dx}$, dapat menggunakan rumus aturan pangkat.

misal :

$a = x^3 - 5x^2 + 3$ sehingga $u = \sin a$

$\frac{da}{dx} = 3x^2 - 10x$ $\qquad \frac{du}{da} = \cos a$

masukkan ke rumus aturan pangkat untuk mendapatkan $\frac{du}{dx}$

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{da} \cdot \frac{da}{dx}$$ *aturan rantai yang pertama*

$$= \cos a \cdot (3x^2 - 10x)$$

$$= (3x^2 - 10x)\cos a$$

$$= (3x^2 - 10x)\cos(x^3 - 5x^2 + 3)$$

Karena kita sudah mendapatkan $\frac{du}{dx}$ dan juga $\frac{dy}{du}$, kita dapat menggunakan kembali aturan rantai untuk mendapatkan hasil $\frac{dy}{dx}$.

aturan rantai yang kedua

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= 8u^3 \cdot (3x^2 - 10x)\cos(x^3 - 5x^2 + 3)$$

$$= (24x^2 - 80x)\cos(x^3 - 5x^2 + 3)\,\underline{u^3}$$

masukkan nilai u sesuai pemisalan

$$= (24x^2 - 80x)\cos(x^3 - 5x^2 + 3)\,(\sin(x^3 - 5x^2 + 3))^4$$

$$= (24x^2 - 80x)\cos(x^3 - 5x^2 + 3)\sin^4(x^3 - 5x^2 + 3)$$

Jadi nilai $\frac{dy}{dx} = (24x^2 - 80x)\cos(x^3 - 5x^2 + 3)\sin^4(x^3 - 5x^2 + 3)$

10.3. Turunan Tingkat Tinggi

Sebuah fungsi f terdiferensiasi dengan menghasilkan sebuah fungsi baru yaitu f' atau kita sebut f aksen sebagai **turunan pertama** dari fungsi f. Jika f' diturunkan lagi maka kita akan mendapatkan fungsi lain yaitu f'' atau kita sebut sebagai **turunan kedua** dari fungsi f. Selanjutnya jika turunan kedua diturunkan lagi maka akan menghasilkan fungsi f''' atau yang disebut **turunan ketiga**. Jika dari turunan ketiga diturunkan lagi maka akan menjadi turunan keempat yang dinyatakan sebagai $f^{(4)}$, dan seterusnya. Perhatikan notasi untuk turunan tingkat tinggi berikut ini.

Tabel 10.1 Notasi turunan tingkat tinggi

Notasi untuk turunan suatu fungsi $y = f(x)$				
Tingkatan turunan	**Notasi** f'	**Notasi** y'	**Notasi** D	**Notasi Leibniz**
Turunan Pertama	$f'(x)$	y'	$D_x y$	$\frac{dy}{dx}$
Turunan Kedua	$f''(x)$	y''	$D_x^2 y$	$\frac{d^2y}{dx^2}$

Turunan Ketiga	$f'''(x)$	y'''	$D_x^3 y$	$\frac{d^3y}{dx^3}$
Turunan Keempat	$f^{(4)}(x)$	$y^{(4)}$	$D_x^4 y$	$\frac{d^4y}{dx^4}$
Turunan Kelima	$f^{(5)}(x)$	$y^{(5)}$	$D_x^5 y$	$\frac{d^5y}{dx^5}$
Turunan Keenam	$f^{(6)}(x)$	$y^{(6)}$	$D_x^6 y$	$\frac{d^6y}{dx^6}$
Turunan Ketujuh	$f^{(7)}(x)$	$y^{(7)}$	$D_x^7 y$	$\frac{d^7y}{dx^7}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Turunan ke-n	$f^{(n)}(x)$	$y^{(n)}$	$D_x^n y$	$\frac{d^ny}{dx^n}$

(Sumber: Purcell, Varberg and Rigdon, 2004; Ratnadewi *et al.*, 2016)

Selain itu jika ada suatu fungsi yang berbentuk $y = uv$ maka turunan yang lebih tinggi untuk fungsi tersebut adalah sebagai berikut.

$$y' = (uv)' = u'v + uv'$$
$$y'' = (uv)'' = u''v + 2u'v' + uv''$$
$$y''' = (uv)''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$y^{(m)} = (uv)^{(m)} = u^{(m)}v + m\,u^{(m-1)}v' + \frac{m(m-1)}{2}u^{(m-2)}v'' + \cdots + uv^{(m)}$$
$$= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \; u^{(m-k)} \; v^{k}$$

Koefisien di atas merupakan koefisien binomial (dari segitiga Pascal) yaitu.

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!} = C_k^m \quad \text{(kombinasi)}$$

Aturan di atas disebut juga aturan Leibniz. (Yahya, Suryadi and Agus, 2014)

Berikut ini adalah beberapa contoh soal terkait turunan tingkat tinggi.

Contoh 10.10

Jika diketahui fungsi $f(x) = 3x^6 - 2x^5 + x^3 - 4x$. Tentukan turunan kelima dari fungsi tersebut.

Penyelesaian

$f(x) = 3x^6 - 2x^5 + x^3 - 4x$, maka

$f^{'(x)} = 18x^5 - 10x^4 + 3x^2 - 4$

$f^{''(x)} = 90x^4 - 40x^3 + 6x$

$f'''(x) = 360x^3 - 120x^2$

$f^{(4)}(x) = 1080x^2 - 240x$

$f^{(5)}(x) = 2160x - 240$

Jadi turunan kelimanya adalah $f^{(5)}(x) = 2160x - 240$.

Contoh 10.11

Carilah turunan ketiga atau $\frac{d^3y}{dt^3}$ dari fungsi $y = (3t+5)^3$.

Penyelesaian

a. Untuk menyelesaikan soal $y = (3t+5)^3$ kita perlu menggunakan aturan rantai.

   <u>*Turunan pertama*</u>

   Misal : $u = 3t + 5$ sehingga $y = u^3$

   $\frac{du}{dt} = 3$ $\qquad$ $\frac{dy}{du} = 3u^2$

$$y' = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt}$$
$$= 3u^2 \cdot 3$$
$$= 9u^2$$
$$= 9(3t + 5)^2$$

Turunan kedua

$$y' = \frac{dy}{dt} = 9(3t + 5)^2$$

Misal : $u = 3t + 5$ sehingga $y' = \frac{dy}{dt} = 9u^2$

$\frac{du}{dt} = 3$ $\frac{d}{du}\left(\frac{dy}{dt}\right) = 18u$

Masukkan kembali ke rumus aturan rantai sehingga

$$y'' = \frac{d^2y}{dt^2} = 18u \cdot 3$$
$$= 54\,u$$
$$= 54(3t + 5) = 162t + 270$$

Turunan ketiga

$$y'' = \frac{d^2y}{dt^2} = 162t + 270$$

karena y'' merupakan fungsi linear yang sederhana sehingga

$$y''' = \frac{d^3y}{dt^2} = 162$$

Jadi turunan ketiga atau $y''' = \frac{d^3y}{dt^2} = 162$.

Contoh 10.12

Jika diketahui fungsi $f(u) = \frac{3}{u^2} + \frac{1}{4}u$ tentukan $f^{(4)}(3)$

Penyelesaian:

Untuk menyelesaikan $f(u) = \frac{3}{u^2} + \frac{1}{4}u$ kita perlu mengubah bentuk soal agar lebih mudah dikerjakan.

$$f(u) = \frac{3}{u^2} + \frac{1}{4}u = 3u^{-2} + \frac{1}{4}u$$
$$f'(u) = 3 \cdot (-2)u^{-3} + \frac{1}{4} = -6u^{-3} + \frac{1}{4}$$
$$f''(u) = (-6)(-3)u^{-4} = 18u^{-4}$$
$$f'''(u) = 18(-4)u^{-5} = -72u^{-5}$$
$$f^{(4)}(u) = (-72)(-5)u^{-6} = 360u^{-6} = \frac{360}{u^6}$$

Selanjutnya mencari $f^{(4)}(3) = \frac{360}{3^6} = \frac{360}{729} = \frac{40}{81}$

Jadi nilai dari $f^{(4)}(3)$ adalah $\frac{40}{81}$

Contoh 10.13

Jika diketahui fungsi $f(x) = \frac{2x^2}{5-x}$ tentukan $f''(2)$

Penyelesaian:

Untuk menyelesaikan soal ini kita dapat menggunakan rumus aturan hasil bagi.

Turunan pertama

$f(x) = \frac{2x^2}{5-x}$

Misal : $u = 2x^2$ $\quad u' = 4x$

$v = 5 - x$ $\quad v' = -1$

Sehingga $f'(x) = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

$$= \frac{4x(5-x)-2x^2(-1)}{(5-x)^2}$$

$$= \frac{20x-4x^2+2x^2}{(5-x)^2} = \frac{20x-2x^2}{25-10x+x^2}$$

Turunan kedua

$f'(x) = \frac{20x-2x^2}{25-10x+x^2}$

Misal : $u = 20x - 2x^2 \longrightarrow u' = 20 - 4x$

$v = 25 - 10x + x^2 \longrightarrow v' = -10 + 2x$

Sehingga $f''(x) = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f''(x) = \frac{(20-4x)(25-10x+x^2)-(20x-2x^2)(-10+2x)}{(25-10x+x^2)^2}$$

$$= \frac{(500-200x+20x^2-100x+40x^2-4x^3)-(-200x+40x^2+20x^2-4x^3)}{(25-10x+x^2)^2}$$

$$= \frac{(500-300x+60x^2-4x^3)-(-200x+60x^2-4x^3)}{(25-10x+x^2)^2}$$

$$= \frac{500-300x+60x^2-4x^3+200x-60x^2+4x^3}{(25-10x+x^2)^2}$$

$$= \frac{500-100x}{(25-10x+x^2)^2}$$

Selanjutnya mencari nilai $f''(2)$ yaitu

$$f''(2) = \frac{500-100(2)}{(25-10(2)+2^2)^2} = \frac{500-200}{(25-20+4)^2} = \frac{300}{9^2} = \frac{300}{81}$$

Jadi nilai dari $f''(2)$ adalah $\frac{300}{81}$

Contoh 10.14

Jika $y = \cos 2x$ tentukan $\frac{d^3y}{dx^3}$, dan $\frac{d^8y}{dx^8}$

Penyelesaian:

$$y = \cos 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = -2 \sin 2x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -4 \cos 2x$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -8\,(-\sin 2x) = 8 \sin 2x$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 16 \cos 2x$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = 32\,(-\sin 2x) = -32 \sin 2x$$

$$\frac{d^6y}{dx^6} = -64 \cos 2x$$

$$\frac{d^7y}{dx^7} = -128\,(-\sin 2x) = 128 \sin 2x$$

$$\frac{d^8y}{dx^8} = 256 \cos 2x$$

Jadi turunan ketiga atau $\frac{d^3y}{dx^3} = -8 \sin 2x$ dan turunan kedelapan atau $\frac{d^8y}{dx^8} = 256 \cos 2x$.

Contoh 10.15

Sebuah benda bergerak sepanjang suatu garis mendatar sehingga posisinya pada saat t adalah $s(t) = t^3 - 4t^2 + 2t - 5$. Jarak satuannya meter dan t dalam detik. Tentukanlah:

a. Kapan benda tersebut berhenti?
b. Berapa percepatannya saat $t = 9$ detik?

Penyelesaian:

Perlu diketahui bahwa:

- Kecepatan *(velocity)* adalah turunan pertama dari suatu jarak/lintasan dinyatakan dengan $v = \frac{ds}{dt}$
- Percepatan *(acceleration)* adalah turunan pertama dari kecepatan atau turunan kedua dari suatu jarak/lintasan dinyatakan dengan $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$

Sehingga untuk menyelesaikan soal 10.15 ini kita dapat menggunakan rumus di atas.

a. Diketahui $s(t) = t^3 - 9t^2 + 8$ sehingga
   kecepatan $v(t) = s' = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 18t$
   Benda akan berhenti jika kecepatannya adalah 0,
   $v(t) = 0$
   $3t^2 - 18t = 0$
   $3t(t - 6) = 0$
   $t = 0$ atau $t = 6$
   Jadi benda akan berhenti atau diam saat $t = 6$ detik.

b. Untuk menentukan percepatan dengan menggunakan hasil di atas.
   $v(t) = 3t^2 - 18t$
   $a(t) = v'(t) = s''(t) = 6t - 18$
   Sehingga $a(3) = 6 \cdot 9 - 18 = 54 - 18 = 36$
   Jadi besar percepatan saat $t = 9$ detik adalah 36 $^{m}/_{detik^2}$

10.4. Soal-Soal Latihan

Kerjakanlah soal-soal latihan berikut ini dengan tepat.

1. Carilah turunan pertama dari fungsi-fungsi berikut ini.
   a. $y = 3x^2 + \sqrt[4]{x^5} - 2\cot x$
   b. $f(x) = 5\sin 2x - \cos 3x$
   c. $y = 5\sec x - \frac{1}{4}\cot x$
   d. $f(t) = \frac{1}{2}\tan t \sin 2t$
   e. $y = 6x^2 \cdot 4\cot x$
   f. $y = \frac{2\sin x}{\tan x}$
   g. $y = \frac{\frac{1}{3}\cos x}{9\sqrt{x}}$
   h. $f(t) = 2t\cos t - 2\sin t + t^2 \sin t$
   i. $f(u) = \frac{\sin u + \cos u}{\sin u}$
   j. $y = (1 + \cos x)\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x}\right)$

2. Diketahui suatu fungsi $f(a) = \frac{\sin^2 a}{1-\cos a}$, tentukanlah nilai dari $f'\left(\frac{1}{3}\pi\right)$.
3. Diketahui fungsi $f(u) = \frac{\sin u - \cos u}{\cos u + \sin u}$, tentukanlah nilai dari $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
4. Jika diketahui $f(x) = 4x^2 \tan 2x$ maka $f'(\pi) = \cdots$
5. Gunakan aturan rantai untuk menyelesaikan turunan pertama fungsi berikut ini.
   a. $f(h) = \frac{3}{(h^4 - 2h^3 + 5h - 2)^7}$
   b. $y = (x^3 - 3x^2 + 5x - 9)^{101}$
   c. $f(x) = \sqrt[4]{(x^7 - 2x^4 + 6x)^3}$

d. $y = \left(\frac{x^3-1}{x^3+1}\right)^5$

e. $y = 7\tan\left(\frac{1}{6}x^6 - 5x^4\right)$

f. $y = \cos\left(\frac{2x+5}{3x^2}\right)$

g. $y = \sin^6(3x^2 + 4x - 1)$

h. $f(x) = -8\cos\ (x^3 + 3x^2 + x)^3$

i. $y = \cos^4\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

j. $y = [2\sin^5(\cos x)]$

6. Diketahui fungsi $f(t) = \frac{1-\cos^2 t}{1+\cos^2 t}$. Tentukanlah nilai $f'(\pi)$.

7. Diketahui $f(a) = 2\sin^3 a$. Tentukan nilai $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

8. Jika diketahui $y = x(1 + \cot x)^3$, maka $y' = \cdots$

9. Tentukan turunan ketiga dari fungsi berikut ini.

a. $f(x) = x^4 - 3x^2 + 5x - \frac{2}{x}$

b. $y = \frac{1}{t-1}$

c. $y = \sin(4t)$

d. $f(x) = \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{5}x + \sqrt{x}$

10. Diketahui fungsi $y = (3 - 2x)^5$ tentukan $\frac{d^4y}{dx^4}$

11. Diketahui suatu fungsi $f(s) = \frac{(s+1)^2}{s-1}$ tentukanlah $f''(3)$.

12. Diketahui suatu fungsi $f(t) = t(1 - t^2)^3$, tentukanlah nilai dari $f''(2)$.

13. Jika $y = 8\cos^2 t$ maka $\frac{d^2y}{dt^2}$ adalah ...

14. Sebuah benda bergerak sepanjang suatu garis koordinat mendatar sehingga posisinya pada saat t adalah $s = f(t) =$

$\frac{1}{2}t^4 + 5t^3 - 12t$. Jarak satuannya meter dan t dalam detik. Tentukanlah:

a. Kecepatan dan percepatan dalam t.

b. Kecepatan dan percepatan saat $t = 2$ detik

15. Sebuah benda bergerak sepanjang suatu garis sehingga jaraknya dari titik 0 di setiap saat t adalah

    $f(t) = ct^3 + dt^2 - 5t$. Jika pada saat $t = 1$ dan $t = 5$ mempunyai kecepatan nol, maka tentukan nilai $\frac{d}{c}$.

DAFTAR PUSTAKA

Pinem, M.D. (2017) *Kalkulus untuk perguruan tinggi*. Rekayasa Sains.

Purcell, E.J., Varberg, D. and Rigdon, S.E. (2004) *Kalkulus Jilid 1 edisi kedelapan*. kedelapan. Penerbit Erlangga.

Ratnadewi *et al.* (2016) *Matematika Teknik Untuk Perguruan Tinggi*. edisi revisi. Rekayasa Sains.

Stewart, J., Clegg, D. and Watson, S. (2021) *Calculus Early Transcendentals Ninth Edition, Metric Version*. 9e edn. Cengage Learning, Inc.

Yahya, Y., Suryadi, D. and Agus (2014) *Matematika Dasar Perguruan Tinggi*. Jakarta: Penerbit Ghalia Indonesia.

BAB 11

TURUNAN (II)

Oleh Ulfah Sa'adah, M.Pd.

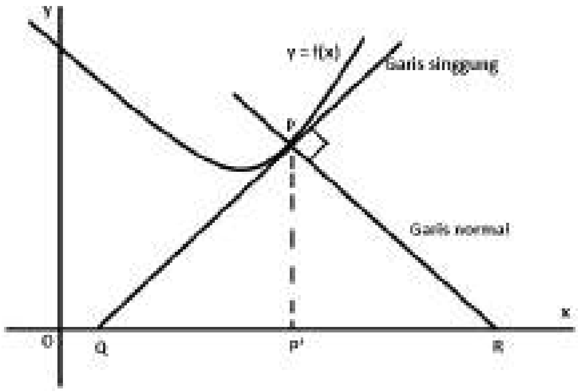
11.1. Turunan Fungsi Implisit

Persamaan fungsi dalam bentuk implisit dituliskan $f(x,y) = 0$. Jika fungsi bentuk implisit ini ditentukan turunannya yaitu $\frac{dy}{dx}$, maka ada dua cara yang dapat dilakukan untuk mencari turunannya, yaitu dengan cara:

1. Mengubah fungsi implisit tersebut menjadi bentuk eksplisit yaitu $y = f(x)$, lalu diturunkan fungsi tersebut terhadap variabel x sehingga diperoleh $\frac{dy}{dx}$.
2. Melakukan differensial langsung yaitu mendifferensialkan variabel x dan variabel y secara bergantian. Kemudian dihubungkan keduanya sehingga diperoleh $\frac{dy}{dx}$. (Pinem, 2015)

11.2. Garis Singgung dan Garis Normal Fungsi

Sebuah fungsi $y = f(x)$ jika disinggung oleh sebuah garis, maka gradien garis singgungnya yaitu $m = y' = f'(x)$. Coba perhatikan gambar berikut ini.



Gambar 11.1 Garis normal dan Garis singgung

(Sumber: Penulis, 2023)

Berdasarkan gambar diatas, PR = garis normal; PQ = garis singgung, QP' = sub tangen = proyeksi QP pada sumbu-x dan RP' = sub normal = proyeksi RP pada sumbu-x.

Andaikan fungsi $y = f(x)$ di atas adalah kontinue dan differensiabel dan titik $P(x_1, y_1)$ ada pada fungsi $y = f(x)$, maka gradien garis singgung di titik P adalah $m = y' = f'(x)$, sehingga:

- Persamaan garis singgung (tangen) (PQ) di titik P ialah:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

- Persamaan garis normal (PR) di titik P ialah:

$$y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$$

Garis normal dan garis singgung merupakan dua buah garis yang saling tegak lurus, sehingga diperoleh hubungan gradien sebagai berikut.

$$m_1 . m_2 = -1$$

- Apabila koordinat titik $Q(x_2, 0)$, maka persamaan garis singgung:

$0 - y_1 = m(x_2 - x_1)$, diperoleh $x_2 = x_1 - \frac{y_1}{m}$, atau $x_1 - x_2 = \frac{y_1}{m}$

Dari gambar 11.1 diperoleh:

$QP' = OP' - OQ = x_1 - x_2$ yang sama dengan $\frac{y_1}{m}$, sehingga:

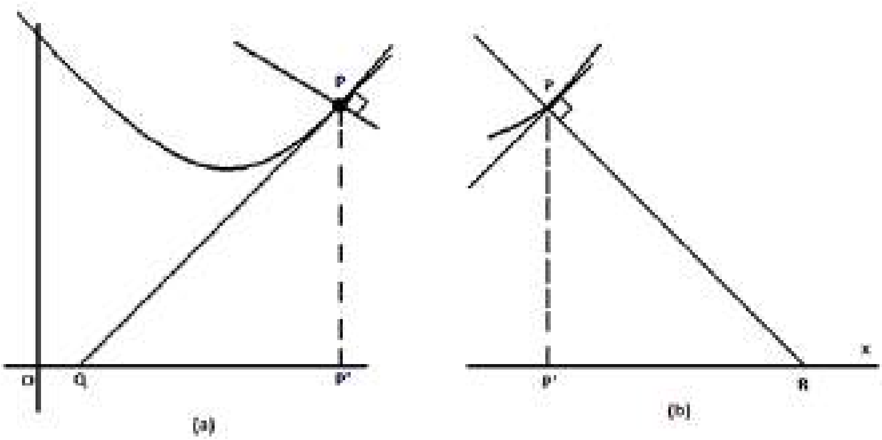
Panjang garis sub tangen $(QP') = x_1 - x_2 = \frac{y_1}{m}$

- Apabila koordinat titik $R(x_3, 0)$, maka persamaan garis normal:

  $0 - y_1 = -\frac{1}{m}(x_3 - x_1)$, diperoleh $x_3 - x_1 = m.y_1$,

  Dari gambar 11.1 diperoleh:

$RP' = OR - OP' = x_3 - x_1$ sama dengan $m.y_1$, sehingga: Panjang garis subnormal $(RP') = x_3 - x_1 = m.y_1$



Gambar 11.2 Panjang garis singgung dan normal

(Sumber: Penulis, 2023)

Berikut penentuan panjang garis normal dan panjang garis singgung (tangen) dan dengan menggunakan teorema Phytagoras.

Perhatikan segitiga QP'P:

$$(PQ)^2 = (QP')^2 + (PP')^2 = \left(\frac{y_1}{m}\right)^2 + {y_1}^2$$

$$(PQ)^2 = \frac{{y_1}^2}{m^2} + {y_1}^2 = \frac{{y_1}^2}{m^2} + \frac{m^2{y_1}^2}{m^2} = \frac{{y_1}^2}{m^2}(1 + m^2)$$, maka diperoleh:

Panjang garis singgung adalah : $PQ = \frac{y_1}{m}\sqrt{1 + m^2}$

Dari segitiga PP'R:

$(PR)^2 = (P'R)^2 + (PP')^2 = (m.y_1)^2 + {y_1}^2 = {y_1}^2(m^2 + 1)$, maka diperoleh:

Panjang garis normal adalah: $PR = y_1\sqrt{1 + m^2}$.

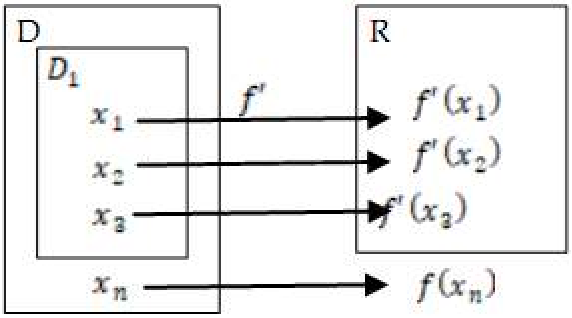
11.3. Diferensial dan Hampiran

Diferensial adalah sebutan lain dari turunan. Jika nilai $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ ada, maka artinya bahwa fungsi tersebut terdiferensialkan di x dan diferensiasi merupakan proses dalam menemukan turunan. Berikut penjelasan dari derivatif dan diferensial.

Jika ditentukan suatu fungsi f dengan daerah domain D. Jika x_1 adalah anggota D, maka $f(x_1)$ ada dan tunggal. Jika D_1 adalah himpunan bagian dari D dimana fungsi f mempunyai derivatif, maka:

- Jika x_1 anggota dari D_1 berarti bahwa $f(x_1)$ ada dan tunggal serta juga maka $f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1+\Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$ ada dan tunggal.
- Jika x_2 anggota dari D_1 berarti bahwa $f(x_2)$ ada dan tunggal serta juga maka $f'(x_2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_2+\Delta x) - f(x_2)}{\Delta x}$ ada dan tunggal.
- Jika x_n anggota dari D_1 berarti bahwa $f(x_n)$ ada dan tunggal tetapi $f'(x_n)$ tidak ada atau tidak tunggal.

Agar lebih memahami penjelasan diatas maka dapat dinyatakan dalam sebuah diagram panah seperti gambar berikut:



Gambar 11.3 Pemetaan f'

(Sumber: Penulis, 2023)

Perhatikan gambar 11.3, untuk setiap anggota D_1 diperoleh nilai f' yang tunggal. Artinya bahwa didapat fungsi baru yaitu f' dengan domain D_1. Fungsi baru ini merupakan fungsi derivatif dari fungsi f. Proses menemukan fungsi f' dari fungsi f ialah turunan.

Dari contoh diatas, fungsi f disebut diferensiabel (dapat diturunkan) jika memenuhi beberapa syarat berikut:

1. $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ ada
   $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ ini dikatakan ada apabila hasil limit kiri bernilai sama dengan limit kanan.
2. Domain D_1 dari fungsi f' sama dengan domain D fungsi f $(D = D_1)$.

Agar lebih memahami uraian diatas, maka perhatikan teorema berikut ini.

Teorema

Jika $f'(c)$ ada maka f kontinu dititik c.

Bukti:

Karena fungsi f diferensiabel pada $x = c$, berarti $f'(c)$ ada. Akan ditunjukkan bahwa $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

$$f(x) = f(c) + \frac{f(x) - f(c)}{x - c}(x - c), x \neq c$$

Karena $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} \left[f(c) + \frac{f(x)-f(c)}{x-c}(x - c) \right]$

$$= \lim_{x \to c} f(c) + \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \lim_{x \to c} (x - c)$$

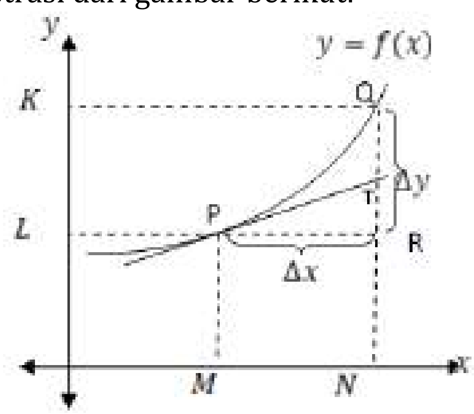
$$= f(c) + f'(c).0$$

$$= f(c)$$

Diperoleh $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$, maka disimpulkan bahwa fungsi f kontinu pada $x = c$.

Berdasarkan teorema diatas dijelaskan bahwa jika terdapat suatu fungsi yang memiliki turunan di sebuah titik, maka fungsi tersebut kontinu di titik itu. Akan tetapi, tidak berlaku sebaliknya dikarenakan ada fungsi yang kontinu pada suatu titik tetapi tidak mempunyai derivatif pada titik itu. Jadi kekontinuan suatu fungsi adalah syarat perlu untuk adanya derivatif, namun bukan syarat cukup.

Perhatikan ilustrasi dari gambar berikut:



Gambar 11.4 Arti $\frac{dy}{dx}$ dari grafik fungsi $y = f(x)$

(Sumber: Penulis, 2023)

Dari gambar diatas, pada kurva dibuat dua titik yaitu $P(x, y)$ dan $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$ yang berdekatan letaknya. Sehingga dapat dinyatakan bahwa $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{LK}{MN} = \frac{RQ}{PR}$ sama dengan gradien garis singgung PQ dan $f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

Dari gradien garis singgung titik P yang memotong RQ pada titik T, diperoleh:

$f'(x) = \frac{RT}{PR} = \frac{RT}{\Delta x}$ atau $RT = f'(x) \cdot \Delta x$

Inilah yang dikatakan sebagai diferensial y (yang sesuai dengan perubahan Δx pada x) dimana lambangnya dituliskan sebagai dy. Sehingga dapat dinyatakan bahwa $dy = f'(x) \cdot \Delta x$.

Jika kita ingin memandang dy untuk memperoleh arti diferensial yang bersesuaian itu. Maka, cobalah perhatikan fungsi identitas $f(x) = x$. Dari fungsi tersebut diperoleh:

$$\begin{aligned} dy &= f'(x). \Delta x \\ &= 1. \Delta x \\ &= \Delta x \qquad \qquad .... (i) \end{aligned}$$

Karena dalam fungsi identitas $y = f(x) = x$, maka dapat dituliskan:

$$dy = d[f(x)] = dx \qquad .... (ii)$$

Berdasarkan persamaan (i) dan (ii) diperoleh $dx = \Delta x$. Jadi jika diketahui $y = f(x)$, maka:

$$dy = d[f(x)] = f'(x)dx$$

Berdasarkan uraian diatas, akan dijabarkan definisi formal dari diferensial.

Misalkan $y = f(x)$ terdiferensialkan di x dan misalkan bahwa dx diferensial dari variabel bebas x, menyatakan penambahan sembarang dari x. Diferensial yang bersesuaian dengan dy dari variabel tak bebas y dtuliskan:

$$dy = f'(x)dx$$

Diferensial berperan juga sebagai nilai hampiran. Pada gambar 11.4 diatas, misalkan $y = f(x)$, dan jika x diberikan penambahan sebesar Δx, maka y juga mendapatkan penambahan yang sama sebesar Δy, yang besar nilainya dapat dihampiri oleh dy, maka $f(x + \Delta x)$ diaproksimasi oleh:

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy = f(x) + f'(x)\Delta x$$

(Saraswati Sari and Rodliyah lesyah, 2020)

11.4. Soal-soal Latihan

1. Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi $2xy + x^2 + 1 = 0$ dengan cara mengubahnya terlebih dahulu menjadi bentuk eksplisit dan dengan cara turunan langsung.
2. Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi $x^2 + y^2 - 4 = 0$ dengan cara mengubahnya terlebih dahulu menjadi bentuk eksplisit dan dengan cara turunan langsung.
3. Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi $3x^2y + 4xy^2 - 5 = 0$ dengan cara turunan langsung.
4. Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi $\sin 2x + \cos 2y + 3 = 0$ dengan cara turunan langsung.
5. Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi $3\tan(3xy) + \cos(3x) = 0$ dengan cara turunan langsung.
6. Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi $e^{x^2+y^2} - y = 0$ dengan cara turunan langsung.

7. Ubahlah bentuk fungsi implisit $x - 4y + y^2 - 16 = 0$ menjadi bentuk eksplisit dan tentukan turunannya $\frac{dy}{dx}$.
8. Sebuah fungsi $y = f(x) = x^2 - 2x + 2$. Tentukan:
   a. Persamaan garis normal dan persamaan garis singgung
   b. Panjang garis normal dan panjang garis singgung
   c. Panjang garis sub normal dan panjang garis sub tangen (singgung)
9. Diketahui fungsi $y = 2x + 3x^2 - x^3$. Tentukan:
   a. Persamaan garis normal dan persamaan garis singgung
   b. Panjang garis normal dan panjang garis singgung
10. Tentukan nilai hampiran dari $\sqrt{4,6}$ dan $\sqrt{8,2}$ tanpa menggunakan kalkulator.
11. Gunakan diferensial untuk mengaproksimasi penambahan luas sebuah gelembung sabun pada saat jari-jarinya bertambah dari 3 cm menjadi 3,025 cm.

DAFTAR PUSTAKA

Pinem, Mh.D. (2015) *Kalkulus Untuk Perguruan Tinggi*. Rekayasa Sains Bandung.

Saraswati Sari and Rodliyah lesyah (2020) *Buku Kalkulus Dasar, Pendekatan Blended Learning*.

BAB 12

PENGGUNAAN TURUNAN

Oleh Yunita Oktavia Wulandari, S.Si., M.Pd.

12.1. Pendahuluan

Teknik menggambar fungsi dengan turunan. Turunan mempunyai banyak manfaat, salah satunya adalah untuk menggambar kurva fungsi lebih akurat. Untuk membuat sketsa grafik fungsi, kita dapat menggunakan konsep turunan pertama dan kedua. Berikut merupakan langkah-langkah:

1. *Langkah pertama*: Analisis Pra Kalkulus
   a. Memeriksa domain dan range fungsi,
   b. Memeriksa apakah fungsi genap, ganjil, atau bukan keduanya.
   c. Menentukan titik potong grafik dengan sumbu x dan sumbu y.
2. *Langkah kedua*: Analisis Kalkulus
   a. Menggunakan turunan pertama untuk menentukan titik kritis serta interval dimana fungsi naik dan turun.
   b. Mengecek titik kritis untuk maksimum dan minimum lokal.
   c. Menggunakan turunan kedua untuk menentukan interval di mana grafik tersebut cekung ke atas, cekung ke bawah serta menentukan titik beloknya.
   d. Mencari asimtot.
3. *Langkah ketiga*: Menggambar beberapa titik, termasuk titik kritis dan titik belok.
4. *Langkah keempat*: Mensketsa grafik fungsinya (Varberg et al., 2007)(Tim Dosen Kalkulus 1, 2020).

Contoh

Gambarkan sketsa grafik fungsi $f(x) = \frac{-4x}{1+2x}$.

<u>Penyelesaiaan</u>

Langkah 1:

a. Menentukan domain dari f(x)

   Karena fungsi f merupakan fungsi rasional, maka penyebut tidak boleh 0.

$$1 + 2x \neq 0 \rightarrow 2x \neq -1 \rightarrow x \neq \frac{1}{2}$$

   Sehingga didapatkan $D_f = \{x \in R | x \neq \frac{1}{2}\}$.

b. Menentukan kesimetrian fungsi

$$f(-x) = \frac{-4(-x)}{1 + 2(-x)} = \frac{4x}{1 - 2x}$$

   Karena $f(-x) \neq f(x)$ dan $f(-x) \neq -f(x)$, maka fungsi f bukan fungsi genap dan bukan fungsi ganjil.

c. Menentukan titik potong dengan sumbu-x dan sumbu-y

   - Titik potong dengan sumbu-y

     Untuk $x = 0$, maka $f(0) = \frac{-4(0)}{1+2(0)} = \frac{0}{1} = 0$

     Jadi, titik potong dengan sumbu-y di titik (0,0).

   - Titik potong dengan sumbu-x

     Untuk $y = 0$, maka $f(x) = \frac{-4x}{1+2x} = 0$

$$\rightarrow -4x = 0$$

$$\rightarrow x = 0$$

     Jadi, titik potong dengan sumbu-x di titik (0,0).

Langkah 2:

a. Mencari turunan pertama untuk menentukan titik kritis serta interval dimana fungsi naik dan turun

$$f(x) = \frac{-4x}{1 + 2x}$$

$$\rightarrow f'(x) = \frac{(1 + 2x). D_x(-4x) - (-4x). D_x(1 + 2x)}{(1 + 2x)^2}$$

$$= \frac{(1 + 2x)(-4) + 4x(2)}{(1 + 2x)^2}$$

$$= \frac{-4 - 8x + 8x}{(1 + 2x)^2}$$

$$= \frac{-4}{(1 + 2x)^2}$$

Karena pembilang turunannya adalah konstanta, maka turunannya akan tidak akan pernah sama dengan nol. Jadi, satu-satunya nilai kritis untuk turunan pertama akan terjadi ketika turunannya tidak terdefinisi (penyebutnya nol).

$$(1 + 2x)^2 = 0 \rightarrow 1 + 2x = 0$$

$$\rightarrow 2x = -1$$

$$\rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Penyebutnya hanya akan menjadi nol jika $x = -\frac{1}{2}$. Namun, nilai ini tidak termasuk dalam domain fungsi dan juga di mana asimtot vertikal berada. Oleh karena itu, kita tidak memiliki nilai kritis untuk turunan pertama.

Menentukan interval dimana fungsi naik atau turun

Untuk fungsi $f'(x) = \frac{-4}{(1+2x)^2}$ ini, kita hanya memiliki dua interval untuk dilihat

$$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \text{dan} \left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$$

Karena pembilang turunan adalah -4 merupakan suatu konstanta maka pembilangnya akan selalu negatif, sedangkan penyebutnya dikuadratkan sehingga akan selalu positif. Oleh karena itu, turunannya akan selalu negatif, yang berarti fungsinya selalu menurun.

b. Menentukan setiap ekstrem relatif

Karena fungsi ini tidak memiliki nilai kritis dan selalu menurun, tidak ada ekstrem relatif.

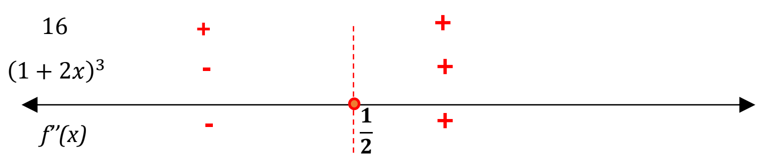
c. Menggunakan turunan kedua untuk menentukan letak di mana grafik cekung ke atas dan cekung ke bawah dan menentukan titik belok.

Turunan fungsi pertama $\mathrm{f}'(\mathrm{x}) = \frac{-4}{(1+2\mathrm{x})^2}$

$$\rightarrow \mathrm{f}'(\mathrm{x}) = -4(1+2\mathrm{x})^{-2}$$
$$\rightarrow \mathrm{f}''(\mathrm{x}) = -4(-2)(1+2\mathrm{x})^{-2-1}.\mathrm{D}_\mathrm{x}(1+2\mathrm{x})$$
$$\rightarrow \mathrm{f}''(\mathrm{x}) = 8(1+2\mathrm{x})^{-3}.2$$
$$= \frac{16}{(1+2\mathrm{x})^3}$$

Jadi turunan fungsi keduanya $\mathrm{f}''(\mathrm{x}) = \frac{16}{(1+2\mathrm{x})^3}$.

Interval yang harus kita uji adalah
$$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \text{dan} \left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$$



Pada interval $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ nilai $\mathrm{f}''(\mathrm{x}) < 0$, maka pada interval tersebut fungsi cekung ke bawah. Sedangkan pada interval $\left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$ nilai $\mathrm{f}''(\mathrm{x}) > 0$, maka pada interval tersebut fungsi cekung ke atas.

Temukan titik-titik belok. Satu-satunya perubahan kecekungan terjadi pada $\mathrm{x} = -1/2$ tetapi ini tidak dapat menjadi titik belok karena tidak termasuk dalam domain f(x).

d. Menentukan asimtot

Tetapkan penyebut sama dengan nol untuk mencari asimtot vertikal.

$$1 + 2x = 0 \rightarrow 2x = -1 \rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Jadi asimtot vertikalnya adalah $x = -\frac{1}{2}$.

Bandingkan pangkat derajat dari pembilang dan penyebut untuk menemukan asimtot horizontal, jika ada.

Pangkat derajat dari pembilang: 1

Pangkat derajat penyebut: 1

Pangkat derajat sama sehingga asimtot horizontal adalah sama dengan rasio koefisien.

$$y = \frac{-4}{2} = -2$$

Asimtot horizontal berada di $y = -2$. Karena ada asimtot horizontal maka tidak perlu mencari asimtot miring.

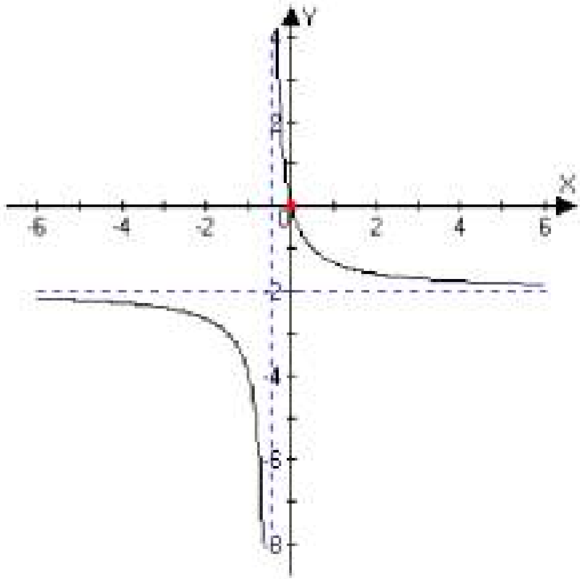
Langkah 3 dan 4

Sekarang Anda akan memplot semua titik dan asimtot yang telah Anda temukan pada langkah sebelumnya dan kemudian hubungkan titik-titik tersebut dengan kurva halus.

Dari langkah 2 kita tahu di mana fungsi tersebut naik/turun dan kecekungannya.

Pada interval $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$, fungsi turun dan cekung ke bawah.

Pada interval $\left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$, fungsi turun dan cekung ke atas.



Gambar 12.1 Grafik fungsi $f(x) = \frac{-4x}{1+2x}$
(Sumber: Ashlock, 2019)

12.2. Kemonotonan dan Kecekungan

Definisi 12.2.1 (Kemonotonan)
Misalkan fungsi f terdefinisi pada selang I, maka fungsi :

1. f naik pada selang I jika untuk setiap $x_1, x_2 \in I$, dengan $x_1 < x_2$, maka $f(x_1) < f(x_2)$.
2. f turun pada selang I jika untuk setiap $x_1, x_2 \in I$, dengan $x_1 < x_2$, maka $f(x_1) > f(x_2)$.
3. f monoton pada selang I jika f naik atau turun pada I.

(Jeter, 2018)

Teorema 12.2.1 (Uji Turunan Pertama untuk Kemonotonan)
Misalkan f kontinu pada selang I dan terdiferensialkan pada setiap titik dalam selang I, maka

1. f naik pada I, jika $f'(x) > 0$ untuk setiap $x \in I$.
2. f turun pada I, jika $f'(x) < 0$ untuk setiap $x \in I$.

Definisi 12.2.2

Misalkan f(x) terdiferensial pada interval terbuka, $I = (a, b)$, jika f'(x) naik pada I maka f dan grafiknya cekung ke atas pada interval *I*, dan jika f'(x) turun pada I maka f dan grafiknya cekung ke bawah pada I.

Teorema 12.2.2 (Uji Turunan Kedua untuk Kecekungan)

Misalkan f mempunyai turunan kedua pada interval terbuka $I = (a, b)$, maka :

1. grafik f(x) cekung ke atas pada I, jika $f''(x) > 0$ untuk semua $x \in I$,
2. grafik f(x) cekung ke bawah pada I, jika $f''(x) < 0$ untuk semua $x \in I$.

Definisi 4.3.2. (titik belok / titik balik)

Misalkan fungsi f(x) kontinu di titik c. Titik (c, f(c)) disebut titik balik dari grafik fungsi f(x) jika f(x) cekung ke atas pada suatu sisi dan cekung ke bawah pada sisi lainnya dari titik c.
Dalam pencarian titik-titik balik, kita mulai dengan mengidentifikasi titik-titik x di mana $f''(x) = 0$ dan $f''(x)$ tidak ada . Setelah itu, kita menentukan apakah titik-titik tersebut benar-benar merupakan titik balik., (Jeter, 2018)**.**

12.3. Nilai Ekstrim

Definisi 12.3.1. (Nilai Maksimum dan Minimum)

Misalkan $S = D_f$ adalah daerah asal fungsi f dan $c \in S$,

1. jika $f(c) > f(x)$, untuk setiap $x \in S$, maka f(c) adalah nilai maksimum f pada S.

2. jika $f(c) < f(x)$, untuk setiap $x \in S$, maka f(c) adalah nilai minimum f pada S.
3. jika f(c)adalah nilai maksimum atau nilai minimum, maka f(c) adalah nilai ekstrim f pada S.

Tidak semua fungsi memiliki nilai maksimum atau minimum; namun, fungsi yang tidak memiliki nilai maksimum atau minimum tersebut dapat kita batasi daerah asalnya agar mempunyai nilai maksimum atau minimum. (Varberg et al., 2007).

Teorema 12.3.1.

Fungsi f mempunyai maksimum dan minimum, jika f kontinu pada interval tertutup [a, b].

Definisi 12.3.2. Titik Kritis

Misalkan fungsi f kontinu pada interval terbuka I dan $c \in I$. Jika $f'(c) = 0$ atau $f'(c)$ tidak ada, maka titik (c, f (c)) disebut titik kritis dari f.

<u>Catatan</u> : titik kritis tidak selalu merupakan titik ekstrim

Teorema 12.3.2. Titik Kritis terhadap Nilai Ekstrim

Misalkan f terdiferensial pada interval I dan $c \in I$. Jika f(c) adalah nilai ekstrim maka c merupakan:

1. Titik ujung dari interval I atau,
2. Titik stasioner dari f yaitu titik c dimana $f'(c) = 0$ atau,
3. Titik singular dari f yaitu titik c dimana f'(c) tidak ada (Varberg et al., 2007).

Contoh

Tentukan nilai ekstrim dari fungsi $f(x) = -2x^3 + 3x^2$, pada selang

$$I = [-\frac{1}{4}, 1]$$

Penyelesaian.

Perhatikan $f(x) = -2x^3 + 3x^2$, pada $[-\frac{1}{4}, 1]$. Kita tentukan dulu titik-titik kritisnya:

1. Karena I merupakan interval tertutup maka $x = -\frac{1}{4}$ dan $x = 1$ merupakan titik-titik ujung dari f pada I.
2. Mencari titik stasioner $f(x) = -2x^3 + 3x^2$, yaitu $f'(x) = 0$

   $\rightarrow -6x^2 + 6x = 0$

   $\rightarrow -6x(x-1) = 0$

   $\rightarrow x = 0$ atau $x = 1$

   Jadi titik stasioner dari f pada interval I adalah $x = 0$ atau $x = 1$.

2. Titik singular tidak ada karena $f'(x)$ terdefinisi pada seluruh bilangan riil.

Jadi titik kritis dari fungsi f adalah $x = -\frac{1}{4}$, $x = 0$, dan $x = 1$.

Perhatikan

$x = -\frac{1}{4}$, maka $f\left(-\frac{1}{4}\right) = -2\left(-\frac{1}{4}\right)^3 + 3\left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{32} + \frac{3}{16} = \frac{7}{32}$

$x = 0$, maka $f(0) = -2(0)^3 + 3(0)^2 = 0$

$x = 1$, maka $f(1) = -2(1)^3 + 3(1)^2 = 1$

Nilai ekstrim dari fungsi f adalah adalah nilai maksimum (f_{maks}) = 1 saat $x = 1$, dan nilai minimum (f_{min}) = 0 saat $x = 0$.

12.4. Dalil L'Hopital

Dalil L'Hospital merupakan metoda untuk menyelesaikan bentuk limit $\frac{0}{0}$, $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ jika $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = 0$.

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to c} f'(x)}{\lim_{x \to c} g'(x)}$$

(*Neswan*, n.d.).

Teorema 12.4.1 L'Hospital

Misalkan $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = 0$ dan $\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ada, maka

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to c} f'(x)}{\lim_{x \to c} g'(x)}$$

Teorema 12.4.2

Jika f(x) dan g(x) mempunyai turunan di c, maka

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Contoh

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 2x - 8} = \frac{\lim_{x \to 2} 2x - 5}{\lim_{x \to 2} 2x + 2} = \frac{2.2 - 5}{2.2 + 2} = \frac{-1}{6} = -\frac{1}{6}$$

12.5. Soal-Soal Latihan

1. Tentukan pada interval mana fungsi $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ berikutnaik, turun, cekung ke atas atau cekung ke bawah dan titik beloknya (jika ada).
2. Sketsa grafik kurva mulus fungsi f (x) $= \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$

DAFTAR PUSTAKA

Ashlock, D. (2019). *Curve Sketching*. 133–170. https://doi.org/10.1007/978-3-031-02420-7_4

Neswan, Oki. (n.d.). Dalil líHÙspital dan Bentuk Tak Tentu, 0–2. FMIPA ITB

Jeter, M. W. (2018). Convex and Concave Functions. *Mathematical Programming*, 215–246. https://doi.org/10.1201/9780203749333-7

Tim Dosen Kalkulus 1. (2020). *Bab 3. Aplikasi Turunan 3.5*. *1*, 1–11.

Varberg, D. E., Purcell, E. J., & Rigdon, S. E. (2007). *Calculus*. Pearson Educación.s

BIODATA PENULIS

Dr. H. Nanang, M.Pd.
Staf Dosen Jurusan Teknik Sipil
Institut Teknologi Garut

Penulis lahir di Bandung tanggal 1 Juli 1964. Penulis adalah dosen dpk Kopertis Wilayah VII Surabaya pada Program Studi Pendidikan FKIP Universitas Muhammadiyah Jember dari tahun 1990 s.d. 2000 dan dosen LLDIKTI Wilayah IV Jawa Barat dan Banten pada Jurusan Teknik Sipil Fakultas Teknik Sipil dan Arsitektur Institut Teknologi Garut (ITG) dari Tahun 2000 s.d. sekarang. Dari tahun 1986 s.d 1990, penulis bekerja sebagai guru di SMAN 1 Bandung, SMA 55 Asia Afrika Bandung, SMA Karya Agung Bandung, SMA Swadaya Bandung.

Penulis menyelesaikan: S1 Pendidikan Matematika di IKIP Bandung (UPI) Tahun 1989, S2 Pendidikan Matematika di IKIP Surabaya (UNESA) Tahun 1999, dan S3 Pendidikan Matematika di UPI Bandung Tahun 2009. Penulis menekuni bidang Pembelajaran Matematika. Penulis juga sebagai Widiaiswara Karya Ilmiah dan Tim Penilai DUPAK Kepangkatan Guru-guru di Kabupaten Garut dari tahun 2015 s.d. sekarang. Telah beberapa kali memperoleh hibah penelitian dan pengabdian pada masyarakat dari Universitas Muhammadiyah Jember, Institut

Teknologi Garut, dan Ristek Dikti Kemendikbud, serta aktif dalam menulis buku ajar dan kegiatan pertemuan ilmiah.

BIODATA PENULIS

Novrianti, S.Si., M.Si., Ph.D.
Dosen Program Studi Teknik Mesin
Sekolah Tinggi Teknologi Nasional (STITEKNAS) Jambi

Penulis lahir di Jambi, 27 November 1989. Penulis merupakan dosen LLDIKTI X yang ditempatkan di STITEKNAS Jambi sejak April 2015. Menyelesaikan pendidikan S1 dan S2 di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas. Kemudian pada tahun 2018 melanjutkan pendidikan S3 di Gifu *University*, Jepang. Kelompok keahlian penulis adalah Matematika Terapan, dan sedang melanjutkan penelitian dalam berbagai bidang terkait.
Disamping sebagai seorang Dosen, penulis juga merupakan guru lepas (*freelance tutor*) pada lembaga bimbingan belajar Nurul Fikri di Padang (2011 – 2015), dan melanjutkan di Nurul Fikri Jambi (2015 – sekarang).

BIODATA PENULIS

Rifka Agustianti, M. Pd
Dosen Matematika Program Studi Motor Pesawat
Fakultas Teknik Universitas Nurtanio Bandung

Penulis lahir di Kota Palopo (Sulawesi Selatan) pada tanggal 27 Agustus 1988. Penulis adalah dosen tetap mata kuliah matematika pada Program Studi Motor Pesawat Fakultas Teknik, Universitas Nurtanio Bandung. Menyelesaikan pendidikan S1 pada tahun 2013 dan langsung melanjutkan pendidikan S2 pada Jurusan Pendidikan Matematika pada tahun 2015 di STKIP Siliwangi Bandung (sekarang IKIP Siliwangi Bandung).

Tidak hanya mengajar di perguruan tinggi, penulis juga aktif menjadi tutor matematika pada beberapa bimbingan belajar dan privat di Bandung. Penulis juga merupakan Ketua Biro Pertemuan Ilmiah DPD Bandung Barat pada Perkumpulan Dosen Peneliti Indonesia (PDPI) dan Wakil Sekretaris Umum pada Forum Komunikasi Dosen (FKD) periode 2022-2027. Penulis juga telah menulis beberapa judul *book chapter* baik sebagai *author* maupun editor, diantaranya Media Pembelajaran, Filsafat Pendidikan Matematika, Konsep Dasar Matematika, Teknologi Pendidikan, Inovasi Teknologi Pembelajaran, Logika dan Struktur Diskrit, Teori Bilangan, Metode Penelitian Kualitatif dan Kuantitatif, Strategi Pembelajaran, dan Model-Model Pembelajaran.

Selain menulis *book chapter*, penulis juga aktif menulis beberapa artikel ilmiah pada jurnal nasional baik dalam ranah penelitian maupun ranah pengabdian kepada masyarakat yang terakreditasi Kemendikbud yang bertemakan matematika dan pendidikan matematika.

BIODATA PENULIS

Khairunnisa Fadhilla Ramdhania, S.Si., M.Si.
Dosen Program Studi Informatika, Fakultas Ilmu Komputer
Universitas Bhayangkara Jakarta Raya

Penulis lahir di Jakarta, 28 Maret 1992. Sejak tahun 2007, penulis mulai tertarik pada bidang eksakta khususnya matematika. Kemudian di tahun 2010 penulis diterima sebagai mahasiwa Jurusan Matematika Universitas Padjadjaran dan menekuni bidang matematika analisis khususnya tentang pecahan atau fraksional. Penulis berhasil lulus pada tahun 2014, lalu mengajar beberapa anak sekolah secara berkelompok untuk belajar matematika. Dari sana penulis memiliki ketertarikan dalam pengajaran dan berkeinginan menjadi dosen sehingga memutuskan untuk melanjutkan studi S2 di Prodi Matematika Institut Teknologi Bandung dan menyelesaikannya dalam waktu 2 tahun. Pada tahun 2018 penulis resmi menjadi bagian dari Universitas Bhayangkara Jakarta Raya di Program Studi Informatika, yakni sebagai dosen pengampu bidang matematika yang menjadi ilmu dasar yang harus dikuasai oleh mahasiswa. Menjadi seorang penulis buku merupakan cita-cita yang sejak lama didambakan, dan ini adalah buku ketiga penulis. Harapannya, penulis dapat konsisten berkontribusi menghasilkan buku-buku lain yang menarik dan mudah dipahami oleh pembaca.

BIODATA PENULIS

Enos Lolang, S.Si., M.Pd.

Enos Lolang, S.Si., M.Pd., Lahir di Makale pada 11 Mei 1969. Penulis adalah dosen program studi Pendidikan Fisika di Universitas Kristen Indonesia Toraja sejak 2000. Menyelesaikan studi jenjang S1 Jurusan Ilmu Fisika di Universitas Hasanuddin Makassar pada tahun 1996, kemudian lanjut dan menyelesaikan studi jenjang S2 pada program studi Pendidikan Matematika di Universitas Negeri Malang pada tahun 2013. Sampai saat ini telah menulis tiga buku ajar untuk mahasiswa program studi pendidikan matematika yaitu Persamaan Diferensial, Aljabar Abstrak, dan Matematika Diskrit. Selain itu penulis juga berpartisipasi dalam menyusun dua book-chapter, yaitu Metode Penelitian Berbagai Bidang Keilmuan, dan Buku Dasar Matematika, dan Aplikasi SPSS Untuk Analisis DataPenelitian Kesehatan pada tahun 2023.

BIODATA PENULIS:

Cynthia Tri Octavianti, S.Si., M.Sc.
Staf Dosen Jurusan Pendidikan Matematika

Penulis lahir di Tegal tanggal 3 Oktober 1986. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas FKIP, Universitas Wisnuwardhana Malang. Menyelesaikan pendidikan S1 pada Jurusan Matematika Universitas Sebelas Maret Surakarta dan melanjutkan S2 pada Jurusan Matematika Universitas Gadjah Mada.

BIODATA PENULIS

Hanna Hilyati Aulia, M.Si.
Dosen Program Studi Ekonomi Syari'ah Fakultas Ekonomi dan Bisnis Islam

Penulis lahir di Metro Lampung pada 18 Desember 1995. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Ekonomi Syari'ah, IAIN Metro Lampung. Menyelesaikan pendidikan S1 pada Jurusan MIPA Matematika Universitas Jenderal Soedirman dan melanjutkan S2 pada Jurusan FMIPA Matematika Institut Teknologi Bandung peminatan Matematika Industri dan Keuangan. Penulis menekuni pemodelan matematika dalam bidang epidemi dan ekonomi. Penulis menggemari kegiatan pengajaran dan seni sejak bangku sekolah dengan membuat Komik Matematika selama SMA hingga Kuliah.

BIODATA PENULIS

Netty Julinda Marlin Gella, M.Si
Dosen Program Studi Pendidikan Matematika
Institut Pendidikan Soe

Penulis lahir di Kupang pada 31 Maret 1990. Penulis adalah dosen di Program Studi Pendidikan Matematika Institut Pendidikan Soe sejak 2017. Menyelesaikan pendidikan Strata 1 di Universitas Nusa Cendana Kupang, Fakultas Sains dan Teknik, Jurusan Matematika (2028-2012) dan strata 2 di Institut Pertanian Bogor, Sekolah Pasca Sarjana Program Studi Matematika Terapan (2013-2015). Mata kuliah yang diampuh adalah aljabar linear, geometri analitik, persamaan diferensial, struktur aljabar, operasi riset, kalkulus 3, teori bilangan dan analisis real. Penulis menekuni bidang menulis sejak 2019 serta telah menerbitkan buku dengan judul "Aljbar Linear Dasar berbasis IT (SCILAB, GeoGebra dan *Microsoft Mathematics*)" dan Pembelajaran Literasi Matematika.

BIODATA PENULIS

Asri Nurhafsari, S.Pd., M.Pd.
Dosen Universitas Islam Syekh-Yusuf

Penulis lahir di Tegal, Jawa Tengah pada tanggal 10 Juli 1990. Penulis menyelesaikan sarjana pada Program Studi Pendidikan Matematika di FPMIPA UPI Bandung tahun 2013. Menyelesaikan program magister dalam bidang Pendidikan Matematika di SPS UPI Bandung tahun 2015. Saat ini penulis adalah dosen tetap di Universitas Islam Syekh-Yusuf (UNIS) Tangerang, Banten. Mata Kuliah yang pernah diampu di beberapa Program Studi pada Fakultas Teknik UNIS antara lain Matematika Dasar, Matematika Lanjut, Kalkulus Diferensial, Kalkulus Integral, Aljabar Linear dan Statistika. Penulis tertarik untuk melakukan dan menekuni penelitian di bidang pendidikan. Selain itu tertarik untuk belajar menulis buku sejak 2022 dan telah ikut menerbitkan buku berjudul Metode Penelitian Pendidikan dan aktif menghasilkan karya ilmiah baik yang dimuat dalam jurnal nasional maupun prosiding. Saat ini penulis aktif dalam kegiatan penjaminan mutu di kampus dan juga mendapatkan tugas tambahan sebagai asesor BAN S/M Provinsi Banten.

BIODATA PENULIS

Ulfah Sa'adah, M.Pd.
Dosen Program Studi Tadris Matematika
Fakultas Tarbiyah IAIN Fattahul Muluk Papua

Penulis lahir di Jayapura tanggal 28 Februari 1989. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Tadris Matematika Fakultas Tarbiyah, IAIN Fattahul Muluk Papua. Menyelesaikan pendidikan S1 pada Program Studi Pendidikan Matematika dan melanjutkan S2 pada Program Studi Pendidikan Matematika di Universitas Cenderawasih. Penulis saat ini menjabat sebagai Ketua Program Studi Tadris Matematika IAIN Fattahul Muluk Papua. Sejak tahun 2016 penulis mengampuh mata kuliah Kalkulus dan Geometri.

BIODATA PENULIS

Yunita Oktavia Wulandari
Staf Dosen Jurusan Pendidikan Matematika

Penulis lahir di Malang tanggal 31 Oktober 1988. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Wisnuwardhana. Menyelesaikan pendidikan S1 pada Jurusan Matematika, Universitas Negeri Malang dan melanjutkan S2 pada Jurusan Pendidikan Matematika di Universitas Negeri Malang.