KARAKTERISASI FUNGSI SEMI DEFINIT POSITIF PADA $\mathbb{R}^s$

TESIS

Karya tulis sebagai salah satu syarat
untuk memperoleh gelar Magister dari
Institut Teknologi Bandung

Oleh
KHAIRUNNISA FADHILLA RAMDHANIA
NIM : 20115003
(Program Studi Magister Matematika)

INSTITUT TEKNOLOGI BANDUNG
JUNI 2017

ABSTRAK

KARAKTERISASI FUNGSI SEMI DEFINIT POSITIF PADA $\mathbb{R}^s$

Oleh

Khairunnisa Fadhilla Ramdhania
NIM: 20115003
(Program Studi Magister Matematika)

Tesis ini membahas mengenai karakterisasi fungsi semi definit posititf pada $\mathbb{R}^s$. Khususnya, dalam tesis ini diperlihatkan bahwa fungsi semi definit positif merupakan transformasi Fourier dari suatu ukuran Borel berhingga yang taknegatif pada $\mathbb{R}^s$. Karakterisasi tersebut dibuktikan dengan menggunakan perumuman Teorema Representasi Riesz.

Kata kunci : fungsi semi definit positif, fungsi definit positif, perumuman teorema representasi Riesz, transformasi Fourier.

ABSTRACT

CHARACTERIZATION OF POSITIVE SEMI-DEFINITE FUNCTIONS ON $\mathbb{R}^s$

By
Khairunnisa Fadhilla Ramdhania
NIM: 20115003
(Master Program of Mathematics)

This thesis discusses a characterization of positive semi-definite functions on $\mathbb{R}^s$. In particular, it is shown in this thesis that positive semi-definite functions are the Fourier transformation of finite nonnegative Borel measures on $\mathbb{R}^s$. This characterization is proved by using Generalized Riesz's Representation Theorem.

Keywords: positive semi definite function, positive definite function, generalized Riesz's representation theorem, Fourier transformation.

KARAKTERISASI FUNGSI SEMI DEFINIT POSITIF PADA $\mathbb{R}^s$

Oleh

KHAIRUNNISA FADHILLA RAMDHANIA
NIM: 20115003
(Program Studi Magister Matematika)

Institut Teknologi Bandung

Menyetujui
Tim Pembimbing

Tanggal 9 Juni 2017

Pembimbing Pertama	Pembimbing Kedua
(Prof. Dr. Hendra Gunawan)	(Dr. Janny Lindiarni)
NIP. 196412291988021001	NIP. 197101141995032002

PEDOMAN PENGGUNAAN TESIS

Tesis S2 yang tidak dipublikasikan terdaftar dan tersedia di Perpustakaan Institut Teknologi Bandung, dan terbuka untuk umum dengan ketentuan bahwa hak cipta ada pada pengarang dengan mengikuti aturan HaKI yang berlaku di Institut Teknologi Bandung. Referensi kepustakaan diperkenankan dicatat, tetapi pengutipan atau peringkasan hanya dapat dilakukan seizin pengarang dan harus disertai dengan kaidah ilmiah untuk menyebutkan sumbernya.

Sitasi hasil penelitian Tesis ini dapat ditulis dalam bahasa Indonesia sebagai berikut:

Ramdhania, K. F. (2017): *Karakterisasi Fungsi Semi Definit Positif pada* $\mathbb{R}^s$, Tesis Program Magister, Institut Teknologi Bandung.

dan dalam bahasa Inggris sebagai berikut:

Ramdhania, K. F. (2017): *Characterization of Positive Semi-Definite Functions on* $\mathbb{R}^s$, Master's Program Thesis, Bandung Institute of Technology.

Memperbanyak atau menerbitkan sebagian atau seluruh tesis haruslah seizin Dekan Sekolah Pascasarjana, Institut Teknologi Bandung.

Kupersembahkan kado kecil ini
untuk Ibu Tersayang,
yang selalu mencintaiku dengan cara yang sempurna,
yang tetap tinggal disaat yang lain pergi,
yang menunjukkan bahwa cinta tanpa syarat itu NYATA,
dan Ayah,
yang selalu menyayangiku dengan cara yang 'tidak biasa',
yang mencintaiku dalam diam.

KATA PENGANTAR

Pertama-tama penulis panjatkan puji syukur kepada Allah SWT, karena berkat rahmat dan segala limpahan nikmat, serta karunia-Nya penulis dapat menyelesaikan tesis dengan baik yang berjudul **"KARAKTERISASI FUNGSI SEMI DEFINIT POSITIF PADA $\mathbb{R}^s$"**. Shalawat serta salam tak lupa penulis panjatkan kepada Nabi Muhammad SAW.

Tesis ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat untuk memperoleh gelar magister dari Institut Teknologi Bandung.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih sebesar-besarnya kepada kedua orang tua, Ibunda Dra. Iin Kartinah dan Ayahanda Drs. Ahmad Mursidi atas cinta, kasih sayang, perhatian, doa, dan harapan, serta dukungan. Selain itu, kepada Prof. Dr. Hendra Gunawan, selaku pembimbing pertama dan Dr. Janny Lindiarni, selaku pembimbing kedua, yang telah meluangkan waktu untuk memberikan arahan-arahan dan masukan yang amat berharga pada saat penyusunan tesis ini.
Tidak lupa pula penulis ucapkan banyak terima kasih kepada :

1. Dr. Kuntjoro Adji S selaku dosen wali penulis.
2. Kedua adik tersayang, Khafiz Fakhri Aziz dan Shafira Raiqah Qurratul'ain yang senantiasa menghibur dan memberi motivasi kepada penulis.
3. Tim Tesis Ceria tersayang, Marjan Nurjanah, Veri Ma'un Karimah yang senantiasa mengajarkan dan menularkan kebaikan, dan Elin Herlinawati yang selalu mendampingi,
4. Marisa Yulistiana, Aam Amelia, Melisa Wirmas, Luthfi Nurul, dan Agung, atas dukungan, bantuan, kasih sayang, dan perhatian kepada penulis.
5. Teman-teman seperjuangan Magister Matematika angkatan 2015 "*compact and connected"*, yang selalu menginspirasi, dan memotivasi.
6. Seluruh dosen dan tata usaha Program Studi Magister Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Institut Teknologi Bandung

7. Seluruh pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu, yang telah banyak memberikan motivasi dan bantuan kepada penulis.

Akhir kata penulis berharap semoga tesis ini dapat bermanfaat bagi pengembangan ilmu matematika dan pembaca. Aamiin.

Bandung, Juni 2017

Penulis

DAFTAR ISI

Bab I Pendahuluan

I.1 Latar Belakang

Salah satu kajian matematika yang banyak digunakan dalam ilmu terapan adalah teori tentang masalah interpolasi. Interpolasi merupakan suatu cara untuk mendapatkan fungsi $F: X \to \mathbb{R}$ dari sejumlah data $\{(x_i, \lambda_i)\}_{i=1}^{n}$ yang diberikan dan memenuhi $F(x_i) = \lambda_i$, $1 \leq i \leq n$. Dengan demikian, F dikatakan menginterpolasi data tersebut. Misal U adalah ruang vektor dengan basis $\{u_1,\ u_2, \dots,\ u_n\}$. Fungsi F yang dicari harus memenuhi

$$\lambda_i = F(x_i) = \sum_{j=1}^{n} c_j u_j(x_i)\ , \qquad 1 \leq i \leq n.$$

Persamaan tersebut dapat ditulis sebagai bentuk matriks $y = Ac$ dengan $A = [u_j(x_i)]$ matriks interpolasi berukuran $n \times n$, yang akan memiliki solusi tunggal jika dan hanya jika A matriks nonsingular untuk setiap $x_1, \dots, x_n$ yang berbeda satu sama lain.

Cheney dan Light (2009), mengemukakan bahwa sejumlah data juga dapat diinterpolasi oleh $\sum_{j=1}^{n} c_j f(x_i - x_j)$, dengan f suatu fungsi translasi. Hal tersebut memotivasi penulis untuk mencari suatu fungsi $f(x_i - x_j)$, khususnya dalam hal ini merupakan matriks $[f(x_i - x_j)]$ yang selalu semi definit positif, fungsi tersebut selanjutnya dikenal sebagai fungsi semi definit positif dan akan dibahas pada bab berikutnya.

Sedikit tentang sejarah fungsi semi definit positif seperti yang dikemukakan oleh Stewart (1976), seorang matematikawan bernama Mathias pada tahun 1923 mendefinisikan dan mempelajari sifat-sifat fungsi semi definit positif dengan variabel real. Ia termotivasi oleh hasil perolehan Caratheodory dan Toeplitz sebelumnya. Selain Mathias, beberapa matematikawan lain yang berkecimpung dalam penelitian yang terkait fungsi semi definit positif di antaranya adalah F. Riesz membahas mengenai aplikasi fungsi ini pada sistem persamaan integral, Herglotz membahas hubungan fungsi semi definit positif dengan masalah momen trigonometri, Fischer, dan Schur. Selain itu, kajian-kajian terkait fungsi semi definit positif tidak hanya tertuang pada artikel ilmiah saja, kajian tersebut juga dibahas dalam beberapa buku, seperti buku karangan Wendland pada tahun 2005.

Pada tesis ini akan dibahas mengenai karakterisasi fungsi semi definit positif pada $\mathbb{R}^s$, khususnya terkait dengan transformasi Fourier, yang dikenal sebagai Teorema Bochner dan secara khusus dijelaskan pada Bab IV. Aplikasi fungsi semi definit positif dibahas oleh Nurjanah (2017), khususnya mengenai fungsi *completely monotone*. Selain itu, dalam Teorema Schoenberg disinggung mengenai fungsi semi definit positif seperti yang dibahas oleh Herlinawati (2017).

I.2 Tujuan Penelitian

Berkenaan dengan latar belakang di atas, tujuan dari penelitian ini yaitu:

1. Mengidentifikasi syarat cukup fungsi semi definit positif.
2. Menyelidiki ketertutupan terhadap perkalian dan penjumlahan fungsi semi definit positif, serta membuktikan beberapa teorema terkait.
3. Memperkenalkan karakterisasi fungsi semi definit positif pada $\mathbb{R}^s$, khususnya terkait dengan transformasi Fourier, beserta pembuktiannya.

I.3 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan pada tesis terdiri dari 5 bab, yaitu: Bab I merupakan pendahuluan yang berisi latar belakang, tujuan, dan sistematika pendahuluan.
Bab II menjelaskan beberapa fakta tentang matriks semi definit positif, transformasi Fourier, dan ukuran Borel, serta fungsional linear.

Bab III berisi pembahasan mengenai fungsi semi definit positif, contoh, dan beberapa teorema terkait, serta pembuktian dari teorema-teorema tersebut.

Salah satu pembahasan yang cukup penting dari tesis ini adalah karakterisasi fungsi semi definit positif yang akan dipaparkan pada Bab IV.

Selanjutnya, Bab V merupakan bab penutup yang berisi kesimpulan dari hasil yang telah diperoleh dan arah pengembangan penelitian tentang fungsi semi definit positif.

Bab II Matriks Semi Definit Positif dan Transformasi Fourier

Pada bab ini akan dijelaskan beberapa fakta tentang matriks semi definit positif, transformasi Fourier, dan ukuran Borel, serta fungsional linear. Fakta-fakta tersebut sebagian besar dirujuk dari Cheney (2009), Muchlis (2014), dan Wendland (2005).

II.1 Matriks Semi Definit Positif

Matriks semi definit positif merupakan salah satu objek yang berkaitan erat dengan pendefinisian fungsi semi definit positif yang akan dibahas pada Bab III. Dalam beberapa buku, matriks ini disebut sebagai matriks definit taknegatif, namun dalam tesis ini penulis menggunakan istilah matriks semi definit positif agar lebih mudah untuk dipahami.

Definisi II.1 Misalkan $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Matriks A disebut **matriks Hermite** jika $A = A^*$, dengan A^* merupakan transpos konjugat dari A.

Konsekuensi dari Teorema Spektral di antaranya adalah setiap nilai eigen dari matriks Hermite bernilai real dan matriks Hermite dapat didiagonalisasi secara uniter. Dengan kata lain, setiap matriks Hermite A dapat ditulis sebagai

$$A = UDU^*$$

dengan U matriks uniter dan D matriks diagonal real.

Teorema II.2 *Jika $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ memenuhi $u^*Au = 0$* dengan $u \in \mathbb{C}^n$*, maka $A = 0$.*

Bukti. Misalkan $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Ambil $u, v \in \mathbb{C}^n$ sebarang. Kemudian, uraikan

$$0 = (u+v)^*A(u+v) = u^*Au + v^*Au + u^*Av + v^*Av = v^*Au + u^*Av,$$

sehingga diperoleh

$$v^*Au + u^*Av = 0. \tag{1.1}$$

Selanjutnya, substitusi u dengan iu,

$$0 = v^*Aiu + (iu)^*Av = iv^*Au - iu^*Av.$$

Terakhir, kalikan persamaan di atas dengan i agar diperoleh

$$-v^*Au + u^*Av = 0. \tag{1.2}$$

Berdasarkan (1.1) dan (1.2), diperoleh $u^*Av = 0$. Pilih $v = (u^*A)^*$, sehingga

$(u^*A)(u^*A)^* = 0$. Akibatnya, $\|u^*A\|^2 = 0$, yang memberikan $u^*A = 0$. Dengan demikian, $A = 0$. ■

Selain ditinjau dari nilai eigen dan pendiagonalan secara uniter, berikut adalah salah satu karakteristik matriks Hermite.

Teorema II.3 *Misalkan* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. *Pernyataan berikut ekivalen:*

i) A *matriks Hermite,*

ii) untuk setiap $u \in \mathbb{C}^n, u^*Au$ *real.*

Bukti. Misalkan A matriks Hermite, untuk membuktikan $u^*Au \in \mathbb{R}$, harus ditunjukkan bahwa $u^*Au = \overline{u^*Au}$. Perhatikan bahwa

$$\overline{u^*Au} = (u^*Au)^* = u^*A^*u = u^*Au.$$

Dengan demikian, bentuk u^*Au bernilai real.

Sebaliknya, misalkan $A = B + iC$, dengan $B = \frac{1}{2}(A + A^*)$ dan $C = \frac{1}{2i}(A - A^*)$. Pandang

$$B^* = \left[\frac{1}{2}(A + A^*)\right]^* = \frac{1}{2}(A^* + A^{**}) = \frac{1}{2}(A^* + A) = \frac{1}{2}(A + A^*) = B,$$

$$C^* = \left[\frac{1}{2i}(A - A^*)\right]^* = -\frac{1}{2i}(A^* - A^{**}) = -\frac{1}{2i}(A^* - A) = \frac{1}{2i}(A - A^*) = C.$$

Berdasarkan Definisi II.1, B, C Hermite dan berdasarkan premis $u^*Bu, u^*Cu \in \mathbb{R}$, sehingga $u^*Au = u^*Bu + iu^*Cu$. Karena $u^*Au \in \mathbb{R}$, haruslah $u^*Cu = 0$. Lemma II.2 menyatakan bahwa $C = 0$. Dengan demikian, matriks $A = B$ Hermite. ■

Ekivalensi di atas merupakan salah satu sifat untuk mengenali matriks Hermite. Lebih jauh, jika u^*Au taknegatif, maka dapat didefinisikan suatu matriks Hermite yang lebih khusus, yang dikenal sebagai matriks semi definit positif.

Definisi II.4 Misalkan $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matriks Hermite. Matriks A dikatakan **semi definit positif** jika $x^*Ax \geq 0$, untuk setiap $x \in \mathbb{C}^n$.

Selanjutnya, teorema berikut menunjukkan suatu sifat matriks semi definit positif terkait dengan nilai eigen dan determinannya. Selain itu, setiap matriks semi definit positif dapat dituliskan sebagai perkalian sebarang matriks dengan transpos konjugatnya.

Teorema II.5 *Jika A matriks semi definit positif, maka semua nilai eigen A dan determinan A taknegatif.*

Bukti. Misalkan λ adalah nilai eigen A dan $v \neq 0$ adalah suatu vektor eigen yang bersesuaian dengan λ, sehingga berlaku $Av = \lambda v$. Berdasarkan hipotesis, maka

$$0 \leq v^*Av = v^*\lambda v = \lambda \|v\|^2.$$

Karena $v \neq 0$, haruslah $\lambda \geq 0$. Kita tahu bahwa hasil perkalian semua nilai eigen A merupakan determinan A, hal tersebut mengakibatkan $\det(A) \geq 0$. ■

Lemma II.6 Suatu matriks $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ semi definit positif jika dan hanya jika terdapat matriks $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ (tidak harus persegi), sehingga $A = B^*B$.

Bukti. Karena A matriks Hermite, matriks A dapat didiagonalisasi secara uniter, yaitu $A = UDU^*$ untuk suatu matriks uniter U dan $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n)$ dengan λ_i nilai eigen A, untuk $i = 1,, \dots n$. Berdasarkan premis, A merupakan matriks semi definit positif, akibatnya untuk setiap $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0$. Selanjutnya pilih $B = U\, diag(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)U^*$ dengan $\alpha_i \in \mathbb{C}$ dan $|\alpha_i|^2 = \lambda_i$, $\quad i = 1,2, \dots, n$, maka

$$\begin{aligned} B^*B &= U\, diag(\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, \dots, \overline{\alpha_n})U^*U\, diag(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)U^* \\ &= U\, diag(|\alpha_1|^2, |\alpha_2|^2, \dots, |\alpha_n|^2)U^* \\ &= U\, diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n)U^* \\ &= UDU^* = A\,. \end{aligned}$$

Sebaliknya, Ambil $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ yang memenuhi $A = B^*B$ untuk suatu $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ dan ambil $u \in \mathbb{C}^n$ sebarang. Perhatikan bahwa

$$u^*Au = u^*(B^*B)u = u^*B^*Bu = (uB)^*Bu = \|Bu\|^2 \geq 0.$$

Berdasarkan Definisi II.4, matriks A semi definit positif. ■

Definisi II.7 Misalkan $A,\ B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. **Hasil kali Schur** dari A dan B adalah

$$[C_{ij}] = [A_{ij}][B_{ij}].$$

Lemma II.8 (Schur) *Hasil kali Schur dari dua matriks semi definit positif merupakan matriks semi definit positif.*

Bukti. Ambil $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ semi definit positif sebarang. Misalkan $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ merupakan hasil kali Schur dari A dan B. Berdasarkan Lemma II.6, matriks A dan matriks B dapat ditulis sebagai $A = E^*E$ dan $B = F^*F$, dengan $E, F \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

Ambil $u \in \mathbb{C}^n$ sebarang, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} u^*Cu &= \sum_i \sum_j \overline{u_i} u_j \sum_v \sum_w \overline{E_{vi}} E_{vj} \overline{F_{wi}} F_{wj} \\ &= \sum_v \sum_w \left(\sum_i \overline{u_i} \overline{E_{vi}}\, \overline{F_{wi}} \right) \left(\sum_j u_j E_{vj}\, F_{wj} \right) \\ &= \sum_v \sum_w \left| \sum_j u_j E_{vj}\, F_{wj} \right|^2 \geq 0\,. \end{aligned}$$

Berdasarkan Definisi II.4, matriks C semi definit positif. ■

II.2 Transformasi Fourier

Subbab ini membahas tentang transformasi Fourier dan beberapa sifatnya. Transformasi Fourier dibutuhkan sebagai alat untuk mengkarakterisasi fungsi semi definit positif yang akan dibahas pada Bab III. Sebelumnya, perlu diingat kembali tentang ruang $L^1(\mathbb{R}^s)$, yaitu koleksi fungsi yang terintegralkan mutlak sepanjang $\mathbb{R}^s$.

Definisi II.9 Misalkan $f \in L^1(\mathbb{R}^s)$ dengan $\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}^s} |f(x)| dx$. **Transformasi Fourier** dari f dinotasikan $\hat{f}$ dan didefinisikan sebagai

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-s/2} \int_{\mathbb{R}^s} f(x) e^{-i\xi^T x} dx\,, \quad \xi \in \mathbb{R}^s,$$

serta **inversi Fourier** dari f didefinisikan sebagai

$$\check{f}\,(\xi) = (2\pi)^{-s/2} \int_{\mathbb{R}^s} f(x) e^{i\xi^T x} dx\,, \quad \xi \in \mathbb{R}^s\,.$$

Salah satu operator yang memiliki kaitan cukup erat dengan transformasi Fourier adalah operator konvolusi.

Definisi II.10 Misalkan f dan g fungsi pada $\mathbb{R}^s$. **Konvolusi** dari f dan g dinotasikan $f * g$ dan didefinisikan sebagai

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^s} f(x - y) g(y) dy,$$

untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}^s$.

Teorema berikut memaparkan sifat transformasi Fourier yang berkaitan dengan konvolusi, translasi, dan dilasi. Beberapa bukti dari teorema di bawah dapat dilihat pada Wendland (2005).

Teorema II.11 *Misalkan* $f \in L^1(\mathbb{R}^s)$. *Pernyataan berikut benar.*

i) Transformasi Fourier dari $f * g$ *adalah* $(f * g)\hat{}(x) = (2\pi)^{\frac{s}{2}} \hat{f}(x)\hat{g}(x)$.

ii) Jika $\tilde{f}(x) = \overline{f(-x)}$, *maka* $\left(\tilde{f} * f\right)\hat{}(x) = (2\pi)^{\frac{s}{2}} \left|\hat{f}(x)\right|^2$.

iii) Jika $T_a f(x) = f(x - a)$ *untuk setiap* $a \in \mathbb{R}^s$, *maka* $(T_a f)\hat{}(x) = e^{-ix^T a}\hat{f}(x)$.

iv) Jika $S_\alpha f(x) = f\left(\frac{x}{\alpha}\right)$, *untuk setiap* $\alpha > 0$, *maka* $(S_\alpha f)\hat{}(x) = \alpha^s S_{1/\alpha}\hat{f}(x)$.

Bukti.

i) Ambil $f, g \in L^1(\mathbb{R}^s)$ sebarang. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}(f * g)\hat{}(x) &= (2\pi)^{-s/2} \int_{\mathbb{R}^s} (f * g)(y) e^{-ix^T y} dy \\ &= (2\pi)^{-\frac{s}{2}} \int_{\mathbb{R}^s} \int_{\mathbb{R}^s} f(z) g(y - z) dz\, e^{-ix^T y} dy.\end{aligned}$$

Misalkan $y' = y - z$, maka

$$\begin{aligned}(f * g)\hat{}(x) &= (2\pi)^{-s/2} \int_{\mathbb{R}^s} \int_{\mathbb{R}^s} f(z) g(y')\, e^{-ix^T(y'+z)} dz dy' \\ &= (2\pi)^{-s/2} \int_{\mathbb{R}^s} \int_{\mathbb{R}^s} f(z) g(y')\, e^{-ix^T y'} e^{-ix^T z} dz dy' \\ &= (2\pi)^{s/2} \left[(2\pi)^{-s/2} \int_{\mathbb{R}^s} f(z) e^{-ix^T z} dz \int_{\mathbb{R}^s} g(y')\, e^{-ix^T y'} dy'\right] \\ &= (2\pi)^{\frac{s}{2}} \hat{f}(x)\hat{g}(x).\end{aligned}$$

■

iii) Ambil $f \in L^1(\mathbb{R}^s)$ dan $a \in \mathbb{R}^s$ sebarang. Misalkan premis terpenuhi, maka

$$(T_a f)\hat{}(x) = \hat{f}(x - a) = (2\pi)^{-s/2} \int_{\mathbb{R}^s} f(y - a) e^{-ix^T y} dy$$

Misalkan $y' = y - a$, maka

$$\begin{aligned}(T_a f)\hat{}(x) &= (2\pi)^{-s/2} \int_{\mathbb{R}^s} f(y') e^{-ix^T(y'+a)} dy' \\ &= e^{-ix^T a} (2\pi)^{-s/2} \int_{\mathbb{R}^s} f(y') e^{-ix^T y'} dy' = e^{-ix^T a}\hat{f}(x).\end{aligned}$$

■

iv) Ambil $f \in L^1(\mathbb{R}^s)$ dan $\alpha \in \mathbb{R}^s$ sebarang. Misalkan premis terpenuhi, maka

$$\begin{aligned}(S_\alpha f)\hat{}(x) &= \hat{f}\left(\frac{x}{\alpha}\right) \\ &= (2\pi)^{-s/2} \int_{\mathbb{R}^s} f\left(\frac{y}{\alpha}\right) e^{-ix^T y} dy\end{aligned}$$

Misalkan $y' = \frac{y}{\alpha}$, maka

$$\begin{aligned}(S_\alpha f)\hat{}(x) &= (2\pi)^{-s/2} \int_{\mathbb{R}^s} f(y') e^{-ix^T \alpha y'} \alpha^s dy' \\ &= \alpha^s (2\pi)^{-s/2} \int_{\mathbb{R}^s} f(y') e^{-ix^T \alpha y'} dy' \\ &= \alpha^s \hat{f}(\alpha x) = \alpha^s S_{1/\alpha} \hat{f}(x).\end{aligned}$$ ■

Teorema II.12 *Misalkan $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^s)$, $g \geq 0$ dan genap, serta $\|g\| = 1$. Definisikan $g_m(x) = m^s g(mx)$. Jika $f \in C(\mathbb{R}^s)$, maka $(f * g_m) \rightrightarrows f$ pada setiap subset kompak $\mathbb{R}^s$.*

Salah satu ruang yang menarik untuk dibahas terkait dengan transformasi Fourier adalah **Ruang Schwartz**, dinotasikan $\mathbb{S}$ yaitu koleksi fungsi $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}^s)$ yang memenuhi $\lim_{\|x\| \to \infty} x^\alpha (D^\beta \gamma)(x) = 0$, untuk setiap $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^s$ dan $x \in \mathbb{R}^s$, Fasshauer (2007). Fungsi γ disebut ***test function***. Perlu diketahui bahwa $D^\beta = \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_s^{\beta_s}}$ dan $|\beta| = \sum_{i=1}^s \beta_i$. Salah satu contoh adalah **fungsi Gauss** yaitu $e^{-a\|x\|_2^2}$, untuk setiap $x \in \mathbb{R}^s, a > 0$.

Teorema II.13 *Fungsi $G(x) = e^{-\|x\|_2^2/2}$ memenuhi $\hat{G} = G$.*

Teorema II.14 *Definisikan $g_m(x) = \left(\frac{m}{\pi}\right)^{s/2} e^{-m\|x\|_2^2}$, $m \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^s$. Jika $f \in C(\mathbb{R}^s)$ naik perlahan, maka*

$$f(x) = \lim_{m \to \infty} \int_{\mathbb{R}^s} f(\omega)\, g_m(\omega - x) dx.$$

II.3 Ukuran Borel

Misalkan Ω sebarang himpunan. Koleksi semua subset Ω disebut himpunan kuasa dan dinotasikan sebagai $\mathcal{P}(\Omega)$.

Definisi II.14 Misalkan dan $R \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, R disebut **ring** pada Ω jika memenuhi:

i) $\emptyset \in R$.

ii) Jika $A, B \in R$, maka $A^c \in R$.

iii) Jika $A, B \in R$, maka $A \cup B \in R$.

Definisi II.15 Misalkan R ring pada Ω. Fungsi $\tilde{\mu} : R \to [0, \infty)$ disebut **pra-ukuran**, jika memenuhi:

i) $\tilde{\mu}\,(\emptyset) = 0$,

ii) misalkan $A_j \in \mathcal{F}^d$, $j \in \mathbb{N}$, jika $\bigcup A_j \in \mathcal{F}^d$, maka $\tilde{\mu}\left(\bigcup A_j\right) = \sum \tilde{\mu}(A_j)$.

Teorema II.16 *Setiap pra-ukuran $\tilde{\mu}$ pada ring R memiliki perluasan μ pada $\sigma(R)$ dimana $\sigma(R)$ adalah aljabar-σ.*

Perlu diketahui bahwa setiap pra-ukuran yang terdefinisi pada aljabar-σ merupakan ukuran. Ukuran juga dapat bernilai negatif yang dikenal sebagai *sign-measure* yaitu fungsi $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ dengan $\mathcal{A}$ merupakan aljabar-σ. Kelak, ukuran yang digunakan dalam pembahasan adalah ukuran yang taknegatif.

Selanjutnya, akan diperkenalkan konsep ukuran untuk kasus Ω yang merupakan ruang topologi.

Definisi II.17 Misalkan Ω ruang topologi dan $\mathcal{O}$ adalah koleksi himpunan-himpunan buka. Aljabar-σ yang dibangun oleh $\mathcal{O}$ disebut Borel aljabar-σ dan dinotasikan sebagai $\mathcal{B}(\Omega)$. Jika Ω adalah ruang Hausdorff, maka ukuran μ yang terdefinisi pada $\mathcal{B}(\Omega)$ yang memenuhi $\mu(K) < \infty$, untuk setiap $K \subseteq \Omega$ kompak, disebut **ukuran Borel.**

II.4 Fungsional Linear

Salah satu teorema yang bersinggungan dalam pembuktian Teorema Bochner adalah representasi Riesz dan perumumannya. Tetapi, sebelum berkenalan dengan teorema tersebut diperlukan pemahaman dasar tentang fungsional linear dan beberapa sifatnya, sebagaimana yang dibahas dalam buku "Elementary Functional Analysis" karangan Barbara.

Definisi II.18 Misalkan X adalah ruang linear bernorm atas $\mathbb{C}$. **Fungsional linear** pada X adalah pemetaan $\lambda: X \to \mathbb{C}$ yang memenuhi

$$\lambda(\alpha x + \beta y) = \lambda(\alpha x) + \lambda(\beta y),$$

untuk setiap $x, y \in X$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Definisi II.19 Misalkan X adalah ruang linear bernorm dan $\lambda: X \to \mathbb{C}$, λ disebut **fungsional linear terbatas** jika terdapat $C > 0$ sehingga $|\lambda(x)| \leq C\|x\|$, untuk setiap $x \in X$.

Teorema II.20 *Misalkan $\lambda: X \to \mathbb{C}$ adalah fungsional linear, λ kontinu jika dan hanya jika λ terbatas.*

Teorema II.21 (Teorema Representasi Riesz) *Misalkan Ω ruang metrik yang kompak lokal. Jika λ fungsional linear yang kontinu pada $C_0(\Omega)$ dan $\lambda(f) \geq 0$, untuk setiap $f \in C_0(\Omega)$ dengan $f \geq 0$, dan terdapat $\mu \geq 0$ ukuran Borel di Ω, maka*

$$\lambda(f) = \int_{\Omega} f(x) d\mu(x)$$

untuk setiap $f \in C_0(\Omega)$.

Bab III Fungsi Semi Definit Positif

Pada bab ini akan diperkenalkan fungsi semi definit positif yang telah disebutkan pada bab sebelumnya. Fungsi ini terkait dengan masalah interpolasi, khususnya matriks interpolasi yang bersifat semi definit positif seperti yang telah disinggung pada Bab I.

Definisi III.1 Misalkan X ruang linear atas lapangan $\mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$. Fungsi $f: X \to \mathbb{C}$ disebut **fungsi semi definit positif** pada X jika untuk setiap $x_1, \ \dots, \ x_n \in X$, matriks A dengan $[A_{ij}] = [f(x_i - x_j)]$ merupakan matriks semi definit positif atau $u^* A u \geq 0$, untuk setiap $u \in \mathbb{C}^n$.

Jika $u^* A u > 0$ dengan titik-titik x_i yang berbeda satu sama lain dan $u \neq 0$, maka f disebut **fungsi definit positif** seperti yang dibahas oleh Karimah (2017).

Contoh III.2 Misalkan X ruang linear dan $y \in X$. Fungsi $f(x) = e^{ixy}$ merupakan fungsi semi definit positif pada X.

Bukti. Ambil $x_1, \dots, x_n \in X$ dan $u \in \mathbb{C}^n$ sebarang. Maka matriks A dengan $[A_{ij}] = [f(x_i - x_j)]$ yang memenuhi

$$\begin{aligned} u^* A u &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \overline{u_k} u_j f(x_k - x_j) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \overline{u_k} u_j \, e^{i(x_k - x_j)y} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \overline{u_k} \, e^{i x_k y} \sum_{j=1}^{n} u_j e^{-i x_j y} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \overline{u_k e^{-i x_k y}} \sum_{j=1}^{n} u_j e^{-i x_j y} \\ &= \left| \sum_{j=1}^{n} u_j e^{-i x_j y} \right|^2 \geq 0 \, . \end{aligned}$$

Berdasarkan definisi, fungsi f semi definit positif. ■

Teorema berikut memberikan salah satu sifat fungsi semi definit positif yaitu ketertutupan terhadap penjumlahan.

Teorema III.3 *Penjumlahan dua fungsi semi definit positif merupakan fungsi semi definit positif.*

Bukti. Ambil $x_1, \dots, x_n \in X$ dan $u \in \mathbb{C}^n$ sebarang. Misalkan f, g fungsi semi definit positif. Karena f, g semi definit positif, berdasarkan Definisi III.1 diperoleh $[A_{ij}] = [f(x_i - x_j)]$, $[B_{ij}] = [g(x_i - x_j)]$, dan $u^*Au \geq 0$, serta $u^*Bu \geq 0$. Misalkan $h = f + g$, dengan kata lain $[h(x_i - x_j)] = [A_{ij}] + [B_{ij}]$, sebut $[C_{ij}]$. Akibatnya,

$$\begin{aligned} u^*Cu &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \bar{u}_i u_j C_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \bar{u}_i u_j (A_{ij} + B_{ij}) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \bar{u}_i u_j A_{ij} + \bar{u}_i u_j B_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \bar{u}_i u_j A_{ij} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \bar{u}_i u_j B_{ij} \\ &= u^*Au + u^*Bu \geq 0. \end{aligned}$$

Berdasarkan Definisi II.4, fungsi $h = f + g$ semi definit positif. ■

Teorema III.4 *Jika f fungsi semi definit positif pada ruang linear, maka*

i) $f(0) \geq 0$,

ii) $f(-x) = \overline{f(x)}$,

iii) $|f(x)| \leq f(0)$.

Bukti. Misalkan f fungsi semi definit positif. Berdasarkan Definisi III.1, tinjau $n = 1$ diperoleh matriks semi definit positif berukuran 1×1, sehingga

$$[A_{11}] = [f(x_1 - x_1)] = f(0) \geq 0.$$

Selanjutnya, tinjau $n = 2$, diperoleh matriks semi definit positif berukuran 2×2. Misalkan $x_2 = x$ dan $x_1 = 0$, maka

$$A = \begin{bmatrix} f(x_1 - x_1) & f(x_1 - x_2) \\ f(x_2 - x_1) & f(x_2 - x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(0) & f(-x) \\ f(x) & f(0) \end{bmatrix} \text{ dan } A^* = \begin{bmatrix} \overline{f(0)} & \overline{f(x)} \\ \overline{f(-x)} & \overline{f(0)} \end{bmatrix}.$$

Karena A matriks Hermite, maka

$$A = \begin{bmatrix} f(0) & f(-x) \\ f(x) & f(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{f(0)} & \overline{f(x)} \\ \overline{f(-x)} & \overline{f(0)} \end{bmatrix} = A^*.$$

Dengan demikian, diperoleh $f(-x) = \overline{f(x)}$.

Langkah terakhir adalah menunjukkan bahwa $|f(x)| \leq f(0)$. Karena A matriks semi definit positif, berdasarkan Lemma II.5, A memiliki determinan taknegatif yaitu

$$0 \leq \det(A) = \begin{vmatrix} f(0) & f(-x) \\ f(x) & f(0) \end{vmatrix} = f(0)^2 - \overline{f(x)}f(x) = f(0)^2 - |f(x)|^2.$$

Jadi, diperoleh $f(0) \geq |f(x)|$. ■

Keberadaan Lemma Schur pada Bab II memberikan peran penting dalam munculnya teorema berikut, yakni ketertutupan fungsi semi definit positif terhadap perkalian.

Teorema III.5 *Koleksi dari semua fungsi semi definit positif yang terdefinisi di ruang linear bersifat tertutup terhadap perkalian.*

Bukti. Ambil f, g fungsi semi definit positif yang terdefinisi di X dan $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ sebarang. Akibatnya, matriks A dengan $[A_{ij}] = [f(x_i - x_j)]$ dan $[B_{ij}] = [g(x_i - x_j)]$ taknegatif. Misalkan $h = fg$ dan $[C_{ij}] = [A_{ij}][B_{ij}]$. Karena $[C_{ij}]$ adalah hasil kali Schur, berdasarkan Lemma Schur, matriks $[C_{ij}]$ merupakan semi definit positif. Akibatnya, fungsi h semi definit positif. ■

Teorema III.6 *Jika f fungsi semi definit positif pada ruang linear bernorm X, maka*

$$\|f(x) - f(y)\|^2 \leq 2f(0)Re[f(0) - f(y-x)].$$

Bukti. Karena f merupakan fungsi semi definit positif, berdasarkan Definisi III.1, untuk $n = 3$ diperoleh matriks semi definit positif berukuran 3×3. Ambil $u \in \mathbb{C}^3$ sebarang, sehingga $u^*Au \geq 0$. Misalkan $x_1 = x, x_2 = 0, x_3 = x - y$, diperoleh

$$[\overline{u_1} \quad \overline{u_2} \quad \overline{u_3}] \begin{bmatrix} f(0) & f(x) & f(y) \\ \overline{f(x)} & f(0) & f(y-x) \\ \overline{f(y)} & \overline{f(y-x)} & f(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \geq 0. \qquad (3.1)$$

Berdasarkan Pertidaksamaan (3.1), diperoleh

$[|u_1|^2 + |u_2|^2 + |u_3|^2]f(0) + 2Re[\overline{u_1}u_2 f(x) + \overline{u_1}u_3 f(y) + \overline{u_2}u_3 f(y-x)] \geq 0$

Pilih $\theta \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $e^{i\theta}[f(x) - f(y)] = \|f(x) - f(y)\|$.

Misalkan $u_1 = t, u_2 = e^{i\theta}$, dan $u_3 = -e^{i\theta}$, dengan $t \in \mathbb{R}$, sehingga

$$(t^2 + 2)f(0) + 2Re\left[te^{i\theta}(f(x) - f(y)) - f(y-x)\right] \geq 0.$$

Selanjutnya, substitusi $e^{i\theta}\big(f(x) - f(y)\big)$ dengan $\|f(x) - f(y)\|$, maka

$$t^2 f(0) + 2f(0) + 2Re[t\,\|f(x) - f(y)\| - f(y-x)] \geq 0.$$

Karena $\|f(x) - f(y)\|$ bernilai real, maka

$$t^2 f(0) + 2\|f(x) - f(y)\|t + 2Re[\,f(0) - f(y-x)] \geq 0.$$

Pertidaksamaan tersebut membentuk fungsi kuadrat yang taknegatif, sehingga memiliki diskriminan yang takpositif, yakni

$$4\|f(x) - f(y)\|^2 - 4f(0)2Re[f(0) - f(y-x)] \leq 0.$$

Dengan demikian, diperoleh

$$\|f(x) - f(y)\|^2 \leq 2f(0)Re[f(0) - f(y-x)]. \qquad \blacksquare$$

Akibat III.7 *Jika f semi definit positif dan kontinu pada 0, maka f kontinu seragam pada ruang linear bernorm X.*

Bukti. Ambil $\varepsilon > 0$ sebarang. Berdasarkan premis, f kontinu di 0, yakni terdapat $\delta_1 > 0$ sehingga untuk setiap $x \in X$ dengan $\|x - 0\| < \delta_1$ berlaku

$$\|f(x) - f(0)\| < \frac{\varepsilon^2}{2f(0)}.$$

Berdasarkan hal tersebut, untuk setiap $x, y \in X$ dengan $\|(y - x) - 0\| < \delta_1$ juga berlaku

$$\|f(y-x) - f(0)\| < \varepsilon^2/2f(0)$$

dan perhatikan pula bahwa $Re[f(0) - f(y-x)] < \|f(y-x) - f(0)\|$. Selanjutnya, kalikan kedua ruas dengan $2f(0)$, diperoleh

$$2f(0)Re[f(0) - f(y-x)] < \varepsilon^2. \tag{3.2}$$

Pilih $\delta \geq \delta_1$ sehingga untuk setiap $x, y \in X$ dengan $\|x - y\| < \delta$, berdasarkan pertidaksamaan (3.2) dan Teorema III.6 diperoleh $\|f(x) - f(y)\|^2 < \varepsilon^2$. Hal ini mengakibatkan, $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$. Dengan kata lain, f kontinu seragam. $\blacksquare$

Bab IV Karakterisasi Fungsi Semi Definit Positif pada $\mathbb{R}^s$

Salah satu perolehan penting dari fungsi semi definit positif adalah karakterisasi dari fungsi tersebut yang pertama kali diperkenalkan oleh Bochner pada tahun 1933. Karakterisasi tersebut berkaitan dengan transformasi Fourier, yaitu setiap fungsi semi definit positif yang kontinu merupakan transformasi Fourier dari suatu ukuran Borel yang bernilai hingga. Namun, untuk membuktikan karakterisasi tersebut diperlukan dua teorema penunjang yang dirujuk dari Wendland (2005).

Teorema IV.1 *Misalkan $f: \mathbb{R}^s \to \mathbb{C}$ kontinu. Fungsi f semi definit positif jika dan hanya jika f terbatas dan memenuhi*

$$\int_{\mathbb{R}^s} \int_{\mathbb{R}^s} f(x-y)\gamma(x)\overline{\gamma(y)}dxdy \geq 0$$

untuk setiap $\gamma \in \mathbb{S}$, dengan $\mathbb{S}$ Ruang Schwartz.

Bukti. Berdasarkan premis, f terbatas dan memenuhi

$$\int_{\mathbb{R}^s} \int_{\mathbb{R}^s} f(x-y)\gamma(x)\overline{\gamma(y)}dxdy \geq 0.$$

Pertama akan dibuktikan f semi definit positif, dengan kata lain harus ditunjukkan

$$\sum_{j,k=1}^{N} \alpha_j \overline{\alpha_k} f\left(x_j - x_k\right) \geq 0.$$

Perhatikan bahwa

$$(\gamma * \tilde{\gamma})(x) = \int_{\mathbb{R}^s} \gamma(x-y)\tilde{\gamma}(y)dy,$$

dengan $\tilde{\gamma}(x) = \overline{\gamma(-x)}$, sehingga

$$(\gamma * \tilde{\gamma})(x) = \int_{\mathbb{R}^s} \gamma(x-y)\overline{\gamma(-y)}dy.$$

Kemudian, kalikan dengan $f(x)$ dan integralkan sepanjang $\mathbb{R}^s$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^s} f(x)\,(\gamma * \tilde{\gamma})(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^s} \int_{\mathbb{R}^s} f(x)\gamma(x-y)\overline{\gamma(-y)}dy\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^s} \int_{\mathbb{R}^s} f(x)\gamma(x+y)\overline{\gamma(y)}dy\,dx.
\end{aligned}$$

Misalkan $x' = x + y$, maka

$$\int_{\mathbb{R}^s} f(x)\,(\gamma * \tilde{\gamma})(x)dx = \int_{\mathbb{R}^s}\int_{\mathbb{R}^s} f(x'-y)\gamma(x')\overline{\gamma(y)}dx'\,dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^s}\int_{\mathbb{R}^s} f(x-y)\gamma(x)\overline{\gamma(y)}dx\,dy \geq 0.$$

Ambil $x_1, x_2, \dots, x_N \in \mathbb{R}^s$ dan $\alpha_1,\ \alpha_2, \dots, \alpha_N \in \mathbb{C}$ sebarang. Pilih

$$\gamma_m = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j g_{2m}(\cdot - x_j),$$

dengan $g_m(x) = \left(\frac{m}{\pi}\right)^{s/2} e^{-m\|x\|_2^2}$.

Perhatikan bahwa $g_m(x) = \left(\frac{m}{\pi}\right)^{\frac{s}{2}} e^{-m\|x\|_2^2} = \left(\frac{m}{\pi}\right)^{\frac{s}{2}} e^{-\|\sqrt{2m}x\|_2^2/2}$. Berdasarkan Teorema II.11 iv) dan II.13, maka

$$g_m(x) = \left(\frac{m}{\pi}\right)^{\frac{s}{2}} G\left(\sqrt{2m}x\right) = \left(\frac{m}{\pi}\right)^{\frac{s}{2}} S_{\frac{1}{\sqrt{2m}}} G(x).$$

Dengan cara serupa, diperoleh

$$g_{2m}(x) = \left(\frac{2m}{\pi}\right)^{\frac{s}{2}} S_{\frac{1}{\sqrt{4m}}} G(x).$$

Selanjutnya, catat juga bahwa

$$\gamma_m(\omega) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j g_{2m}(\omega - x_j) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j T_{x_j} g_{2m}(\omega).$$

Akibatnya, transformasi Fourier dari γ_m adalah

$$\hat{\gamma}_m(\omega) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j (T_{x_j} g_{2m})^{\wedge}(\omega) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j e^{-i\omega^T x_j} \widehat{g_{2m}}(\omega). \tag{4.1}$$

Kemudian akan dihitung transformasi Fourier dari

$$g_m(x) = \left(\frac{m}{\pi}\right)^{\frac{s}{2}} S_{\frac{1}{\sqrt{2m}}} G(x),$$

berdasarkan Teorema II. 11 iv) dan II.13, diperoleh

$$\widehat{g_m}(x) = \left(\frac{m}{\pi}\right)^{\frac{s}{2}} (S_{\frac{1}{\sqrt{2m}}} G)^{\wedge}(x) = \left(\frac{m}{\pi}\right)^{\frac{s}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2m}}\right)^{s} S_{\sqrt{2m}} \hat{G}(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^{s} S_{\sqrt{2m}} G(x).$$

Karena $G\left(\frac{x}{\sqrt{2m}}\right) = S_{\sqrt{2m}}G(x)$, maka

$$\widehat{g_m}(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^s e^{-\left\|\frac{x}{\sqrt{2m}}\right\|_2^2/2} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^s e^{-\|x\|_2^2/4m},$$

dengan cara serupa, dapat dibuktikan bahwa

$$\widehat{g_{2m}}(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^s e^{-\frac{\|x\|_2^2}{8m}}. \tag{4.2}$$

Berdasarkan (4.1) dan (4.2), diperoleh

$$\begin{aligned}\hat{\gamma}_m(\omega) &= \sum_{j=1}^{N} \alpha_j e^{-i\omega^T x_j} \widehat{g_{2m}}(\omega)\\ &= \sum_{j=1}^{N} \alpha_j e^{-i\omega^T x_j} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^s e^{-\|\omega\|_2^2/8m}\\ &= (2\pi)^{-s/2} \sum_{j=1}^{N} \alpha_j e^{-i\omega^T x_j} e^{-\|\omega\|_2^2/8m}.\end{aligned}$$

Langkah berikutnya adalah melakukan transformasi Fourier terhadap konvolusi γ_m dengan $\widetilde{\gamma_m}$, yakni

$$\begin{aligned}(\gamma_m * \widetilde{\gamma_m})\hat{}(\omega) &= (2\pi)^{\frac{s}{2}} |\widehat{\gamma_m}(\omega)|^2\\ &= (2\pi)^{s/2} \left|(2\pi)^{-s/2} \sum_{j=1}^{N} \alpha_j e^{-i\omega^T x_j} e^{-\|\omega\|_2^2/8m}\right|^2.\end{aligned}$$

Catat bahwa

$$\left|\sum_{j=1}^{N} \alpha_j e^{-i\omega^T x_j} e^{-\|\omega\|_2^2/8m}\right|^2 = \sum_{j,k=1}^{N} \alpha_j \overline{\alpha_k} e^{-i\omega^T (x_j - x_k)} e^{-\|\omega\|_2^2/4m},$$

sehingga

$$(\gamma_m * \widetilde{\gamma_m})\hat{}(\omega) = \sum_{j,k=1}^{N} \alpha_j \overline{\alpha_k} e^{-i\omega^T (x_j - x_k)}\, \widehat{g_m}(\omega) = \sum_{j,k=1}^{N} \alpha_j \overline{\alpha_k} \left(T_{(x_j - x_k)} g_m\right)\hat{}(\omega).$$

Dengan menggunakan fakta bahwa $\left(T_{(x_j - x_k)} g_m\right)\hat{}(\omega) = \hat{g}_m\left(\omega - (x_j - x_k)\right)$, maka

$$(\gamma_m * \widetilde{\gamma_m})(\omega) = \sum_{j,k=1}^{N} \alpha_j \overline{\alpha_k}\, g_m\left(\omega - \left(x_j - x_k\right)\right).$$

Kemudian akan ditunjukkan $\sum_{j,k=1}^{N} \alpha_j \overline{\alpha_k} f\left(x_j - x_k\right) \geq 0$.

Ambil $\alpha \in \mathbb{C}^n$ sebarang. Berdasarkan Definisi III.1 dan Teorema II.14,

$$\sum_{j,k=1}^{N} \alpha_j \overline{\alpha_k} f\left(x_j - x_k\right) = \sum_{j,k=1}^{N} \alpha_j \overline{\alpha_k} \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^s} f(x)\, g_m\left(x - (x_j - x_k)\right) dx$$

$$= \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^s} f(x) \sum_{j,k=1}^{N} \alpha_j \overline{\alpha_k}\, g_m \left(x - \left(x_j - x_k\right)\right) dx$$

$$= \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^s} f(x)\, (\gamma_m * \widetilde{\gamma_m})(x) dx \geq 0.$$

Dengan demikian, terbukti bahwa f semi definit positif .

Sebaliknya, akan ditunjukkan f terbatas dan memenuhi

$$\int_{\mathbb{R}^s} \int_{\mathbb{R}^s} f(x-y)\gamma(x)\overline{\gamma(y)} dx dy \geq 0. \tag{4.3}$$

Misalkan $f\colon \mathbb{R}^s \to \mathbb{C}$ semi definit positif dan kontinu. Karena f semi definit positif dan berdasarkan Teorema III.4, f terbatas. Ambil $\gamma \in \mathbb{S}$ sebarang. Persamaan (4.3) terintegralkan, yakni untuk setiap $\varepsilon > 0$, $Q \subseteq \mathbb{R}^s$ *cube* tutup, sehingga

$$\left| \int_{\mathbb{R}^s} \int_{\mathbb{R}^s} f(x-y)\gamma(x)\overline{\gamma(y)} dx dy - \int_{Q} \int_{Q} f(x-y)\gamma(x)\overline{\gamma(y)} dx dy \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.4}$$

Karena Q *cube* tutup, integral lipat sepanjang Q tersebut merupakan limit dari jumlah Riemann, diperoleh

$$\left| \int_{Q} \int_{Q} f(x-y)\gamma(x)\overline{\gamma(y)} dx dy - \sum_{j,k=1}^{n} f\left(x_j - x_k\right)\gamma\left(x_j\right) q_j \overline{\gamma(x_k)}\overline{q_k} \right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.5}$$

untuk setiap $x_1, \ \ldots, \ x_n \in \mathbb{R}^s$ dan $q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{C}$. Berdasarkan Persamaan (4.4) dan (4.5), diperoleh

$$\left| \int_{\mathbb{R}^s} \int_{\mathbb{R}^s} f(x-y)\gamma(x)\overline{\gamma(y)} dx dy - \sum_{j,k=1}^{n} f\left(x_j - x_k\right)\gamma\left(x_j\right) q_j \overline{\gamma(x_k)}\overline{q_k} \right| < \varepsilon.$$

Akibatnya,

$$\int_{\mathbb{R}^s} \int_{\mathbb{R}^s} f(x-y)\gamma(x)\overline{\gamma(y)} dx dy < \sum_{j,k=1}^{n} f\left(x_j - x_k\right)\gamma\left(x_j\right) q_j \overline{\gamma(x_k)}\overline{q_k} + \epsilon.$$

Karena f definit positif, maka berdasarkan Definisi III.1 berlaku

$$\sum_{j,k=1}^{n} f(x_j - x_k)\gamma(x_j)q_j\overline{\gamma(x_k)}\overline{q_k} \geq 0$$

untuk setiap $\gamma(x) \in \mathbb{C}^n$ dan untuk $\varepsilon \to 0$, diperoleh

$$0 \leq \int\limits_{\mathbb{R}^s}\int\limits_{\mathbb{R}^s} f(x-y)\gamma(x)\overline{\gamma(y)}dxdy.$$

Teorema berikut merupakan perumuman dari Teorema Representasi Riesz.

Teorema IV.2 (Perumuman Teorema Representasi Riesz) *Misalkan* $\lambda: C_0^\infty(\mathbb{R}^s) \to \mathbb{C}$ *fungsional linear yang taknegatif untuk setiap* $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^s)$ *dengan* $f \geq 0$. *Maka* λ *memiliki perluasan pada* $C_0(\mathbb{R}^s)$ *dan terdapat* $\mu \geq 0$ *ukuran Borel yang memenuhi*

$$\lambda(f) = \int_{\mathbb{R}^s} f(x)d\mu(x)$$

untuk setiap $f \in C_0(\mathbb{R}^s)$.

Bukti. Ambil $\lambda \in C_0^\infty(\mathbb{R}^s)$ fungsional linear sebarang dengan $\lambda(f) \geq 0$, dan $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^s)$ dengan $f \geq 0$. Akan dibuktikan terdapat $\mu \geq 0$ ukuran Borel sehingga

$$\lambda(f) = \int_{\mathbb{R}^s} f(x)d\mu(x), \; f \in C_0(\mathbb{R}^s).$$

Bukti dari teorema ini dibagi menjadi tiga langkah sebagai berikut.

Langkah 1. Ambil $K \subseteq \mathbb{R}^s$ kompak, maka $C_0^\infty(K) \subseteq C_0^\infty(\mathbb{R}^s)$, dengan $C_0^\infty(K)$ koleksi fungsi yang memiliki *support* di K. Akan dibuktikan λ terbatas lokal yaitu $|\lambda(f)| \leq M_K\|f\|_{L^\infty(K)}$, untuk setiap $f \in C_0^\infty(K)$, dimana M_k adalah suatu konstanta yang bergantung pada K. Pilih $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^s)$ dengan $\varphi|K = 1$ dan $\varphi \geq 0$. Jika $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^s)$ bernilai real, maka

$$\|f\|_{L^\infty(K)}\varphi + f \geq 0 \text{ dan } \|f\|_{L^\infty(K)}\varphi - f \geq 0.$$

Akibatnya, diperoleh $0 \leq \lambda\big(\|f\|_{L^\infty(K)}\varphi + f\big) = \|f\|_{L^\infty(K)}\lambda(\varphi) + \lambda(f)$ dan $0 \leq \lambda\big(\|f\|_{L^\infty(K)}\varphi - f\big) = \|f\|_{L^\infty(K)}\lambda(\varphi) - \lambda(f)$, sehingga dapat ditulis sebagai $\lambda(f) \geq -\|f\|_{L^\infty(K)}\lambda(\varphi)$ dan $(f) \leq \|f\|\,\lambda(\varphi)$. Dengan kata lain,

$$|\lambda(f)| \leq \lambda(\varphi)\|f\|_{L^\infty(K)}.$$

Jika $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^s)$ bernilai kompleks, maka pilih $\theta \in \mathbb{R}$ sehingga $e^{i\theta}\lambda(f) \in \mathbb{R}$. Misalkan $f = a + ib$. Perhatikan bahwa

$$\lambda(Re(f)) = \lambda(Re(a+ib)) = \lambda(a) = Re\big(\lambda(a) + i\lambda(b)\big) = Re\lambda(f),$$

sehingga $\lambda\big(Re(e^{i\theta}f)\big) = Re(\lambda\big(e^{i\theta}f)\big) = \lambda\big(e^{i\theta}f\big) = e^{i\theta}\lambda(f)$. Oleh karena itu,

$$|\lambda(f)| = \left|e^{i\theta}\right||\lambda(f)| = \left|e^{i\theta}\lambda(f)\right| = \left|\lambda\left(Re\big(e^{i\theta}f\big)\right)\right| \leq \lambda(\varphi)\left\|Re\big(e^{i\theta}f\big)\right\|_{L^\infty(K)}$$

$$= \lambda(\varphi)\left|e^{i\theta}\right|\|f\|_{L^\infty(K)} = \lambda(\varphi)\|f\|_{L^\infty(K)}.$$

Dengan demikian, $|\lambda(f)| \leq \lambda(\varphi)\|f\|_{L^\infty(K)}$, untuk setiap $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^s)$.

Langkah 2. Akan ditunjukkan bahwa λ memiliki perluasan lokal pada $C_0\ (K)$. Karena λ terbatas di $C_0^\infty(K)$, λ kontinu. Ambil $0 \leq f \in C_0\ (K)$ sebarang. Selanjutnya, konstruksi $\{f_j\}$ di $C_0^\infty(K)$ yang konvergen seragam ke f. Dengan kata lain, $\lim\limits_{j\to\infty} f_j = f$. Karena $f \in C_0\ (K)$, $\{f_j\}$ dapat dipilih sebagai konvolusi f dengan fungsi-fungsi taknegatif dan punya kompak *support*, yaitu $f_j = f * g_j,\ j \in \mathbb{N}$. Karena λ kontinu dan $f_j \to f$, $\lim\limits_{j\to\infty} \lambda(f_j) = \lambda(f)$. Perhatikan

$$\lambda(f)\ = \lim_{j\to\infty} \lambda\big(f_j\big) = \lambda\ \left(\lim_{j\to\infty} f_j\right) = \lambda\ \left(\lim_{j\to\infty} \int_K\ f(x-y)g_j(y)dy\right) \geq 0.$$

Karena K kompak, $\lambda(f) \geq 0$ kontinu, untuk setiap $f \in C_0\ (K)$, dengan $f \geq 0$, maka berdasarkan Teorema Representasi Riesz, λ memiliki perluasan pada $C_0\ (K)$, dan terdapat $\mu \geq 0$ ukuran Borel pada $\mathcal{B}(K)$ yang memenuhi

$$\lambda(f) = \int_K\ f(x)d\mu(x).$$

Langkah 3. Kemudian, akan ditunjukkan bahwa λ memiliki perluasan di $\mathbb{R}^s$. Misalkan ring $\mathcal{F}^s = \{\bigcup_{i=1}^n [a_i, b_i): a_i, b_i \in \mathbb{R}^s,\ a_i < b_i\}$ yaitu koleksi dari gabungan berhingga kubus semi buka. Misalkan $K_j = \{x \in \mathbb{R}^s: \|x\|_2 \leq j\}$. Ambil $A \in \mathcal{F}^s$ sebarang. Pilih j cukup besar sehingga $A \subseteq K_j$. Definisikan pra-ukuran $\tilde{\mu} : \mathcal{F}^s \to [0,\infty)$ dengan $\tilde{\mu}\ (A) = \mu_{K_j}(A)$, yang memenuhi:

i) $\tilde{\mu}\ (\emptyset) = 0$,

ii) misalkan $A_j \in \mathcal{F}^s$, $j \in \mathbb{N}$, jika $\bigcup A_j \in \mathcal{F}^s$, maka $\tilde{\mu}\ \big(\bigcup A_j\big) = \sum \tilde{\mu}(A_j)$.

Berdasarkan Proposisi 5.31, maka $\tilde{\mu}(A) =\ \mu(A),\ A \in \mathbb{R}^s$. Dengan demikian,

$$\lambda(f) = \int_{\mathbb{R}^s} f(x)d\mu(x)\,. \qquad \blacksquare$$

Teorema IV.3 (Teorema Bochner) *Suatu fungsi kontinu $\phi: \mathbb{R}^s \to \mathbb{C}$ adalah fungsi semi definit positif jika dan hanya jika fungsi tersebut merupakan transformasi Fourier dari suatu ukuran Borel berhingga yang taknegatif pada $\mathbb{R}^s$, yakni*

$$\phi(x) = \hat{\mu}(x) = (2\pi)^{-s/2} \int_{\mathbb{R}^s} e^{-ix^T\omega} d\mu(\omega), \quad x \in \mathbb{R}^s.$$

Bukti. Pertama asumsikan bahwa ϕ merupakan transformasi Fourier dari suatu ukuran Borel yang taknegatif. Ambil $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}^s$ dan $\alpha \in \mathbb{C}^N$ sebarang. Maka diperoleh

$$\sum_{j,k=1}^{N} \alpha_j \overline{\alpha_k}\, \phi(x_j - x_k) = (2\pi)^{-s/2} \sum_{j,k=1}^{N} \alpha_j \overline{\alpha_k} \int_{\mathbb{R}^s} e^{-i(x_j - x_k)^T\omega} d\mu(\omega)$$

$$= (2\pi)^{-s/2} \left| \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \int_{\mathbb{R}^s} e^{-ix_j^T\omega} d\mu(\omega) \right|^2 \geq 0.$$

Dengan demikian, fungsi ϕ semi definit positif.

Sebaliknya, misalkan ϕ semi definit positif. Pertama, definisikan λ suatu fungsional linear pada $\mathbb{S}$, yaitu

$$\lambda(\gamma) = \int_{\mathbb{R}^s} \phi(x)\, \gamma^{\vee}(x) dx, \;\; \gamma \in \mathbb{S}.$$

Jika $\gamma \in \mathbb{S}$ dengan $\gamma = |\psi|^2$, $\psi \in \mathbb{S}$, maka dapat dicari $\lambda(\gamma)$ dengan $f = \check{\psi}$, yaitu

$$\lambda(\gamma) = \int_{\mathbb{R}^s} \phi(x)\, \gamma^{\vee}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^s} \phi(x)\, (|\psi|^2)^{\vee}(x) dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^s} \phi(x) \left(\left| \hat{f} \right|^2 \right)^{\vee}(x) dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^s} \phi(x)\, (2\pi)^{-s/2} \left(\widehat{\tilde{f} * f} \right)^{\vee}(x) dx$$

$$= (2\pi)^{-s/2} \int_{\mathbb{R}^s} \phi(x) \left(\tilde{f} * f \right)(x) dx$$

$$= (2\pi)^{-s/2} \int_{\mathbb{R}^s} \int_{\mathbb{R}^s} \phi(x - y) f(x) \overline{f(y)} dx\, dy \geq 0.$$

Oleh karena itu, diperoleh λ yang taknegatif pada $\{\gamma \in \mathbb{S} : \gamma = |\psi|^2, \psi \in \mathbb{S}\}$.

Langkah kedua adalah memperluas λ pada $\{\gamma \in C_0^\infty(\mathbb{R}^s)$ dengan $\gamma \geq 0\}$. Ambil $\gamma \in C_0^\infty(\mathbb{R}^s)$ dengan $\gamma \geq 0$. Bentuk $\gamma + \varepsilon^2 G$, dengan $G(x) = e^{-\|x\|_2^2/2}$ untuk setiap $\varepsilon > 0$. Akibatnya, dapat dicari $\sqrt{\gamma + \varepsilon^2 G}$ sebut γ_1, jelas bahwa $\gamma_1 \in C^\infty$ bahkan $\gamma_1 \in \mathbb{S}$. Perhatikan bahwa

$$0 \leq \lambda(|\gamma_1|^2) = \lambda\left(\left|\sqrt{\gamma + \varepsilon^2 G}\right|^2\right) = \lambda(\gamma) + \varepsilon^2 \lambda(G)\,,$$

sehingga diperoleh $\lambda(\gamma) \geq 0$ untuk $\varepsilon \to 0$. Karena $\lambda(\gamma) \geq 0$ pada $C_0^\infty(\mathbb{R}^s)$, berdasarkan Teorema IV.2 diperoleh ukuran Borel taknegatif μ, dengan $\hat{\phi}(-x)dx = d\mu(x)$ yang memenuhi

$$\lambda(\gamma) = \int_{\mathbb{R}^s} \gamma(x) d\mu(x)\,,\ \ \gamma \in C_0^\infty(\mathbb{R}^s).$$

Selanjutnya, gunakan hampiran konvolusi untuk menunjukkan keberhinggaan μ. Hampiran konvolusi menggunakan keluarga fungsi $g_m(x) = m^s g(mx)$ dengan $g \in C(\mathbb{R}^s) \cap L^1(\mathbb{R}^s)$, $g \geq 0$, dan $\int g = 1$. Di sini diperlukan $\hat{g} \in C_0\,(\mathbb{R}^s)$ yang taknegatif, untuk menunjukkan hal tersebut pilih $g_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^s)$, kemudian definisikan $g = (g_0 * \tilde{g}_0)^{\vee}$. Perhatikan bahwa

$$\hat{g} = (g_0 * \tilde{g}_0) = (2\pi)^{\frac{s}{2}} |g_0|^2 \geq 0.$$

Karena $g \in L^1(\mathbb{R}^s)$, berdasarkan Teorema Riemann-Lebesgue, $\lim\limits_{\|x\| \to \infty} \hat{g}(x) = 0.$

Dengan demikian, didapat $\hat{g} \in C_0\,(\mathbb{R}^s)$, $g \in \mathbb{S}$ dan $\hat{g} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^s)$.

Langkah berikutnya adalah menujukkan μ memiliki masa total yang hingga dengan menggunakan λ yang telah diperoleh pada langkah sebelumnya. Perhatikan bahwa

$$\int_{\mathbb{R}^s} \phi(x) g_m(x) dx = \int_{\mathbb{R}^s} \hat{g}_m(x) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^s} \hat{g}\left(\frac{x}{m}\right) d\mu(x),$$

dan

$$\hat{g}_m(x) = m^s \hat{g}(mx) = m^s \left[\frac{1}{m^s} \hat{g}\left(\frac{x}{m}\right)\right] = \hat{g}\left(\frac{x}{m}\right).$$

Akibatnya, diperoleh

$$\lim_{m \to \infty} \hat{g}\left(\frac{x}{m}\right) = \lim_{m \to \infty} m^s \hat{g}(mx) = m^s \lim_{m \to \infty} (2\pi)^{-s/2} \int_{\mathbb{R}^s} g(my) e^{-ix^T y} dy.$$

Misalkan $y' = my$ dan $dy' = m^s dy$, maka

$$\lim_{m \to \infty} \hat{g}\left(\frac{x}{m}\right) = m^s (2\pi)^{-\frac{s}{2}} \lim_{m \to \infty} \int_{\mathbb{R}^s} g(y') e^{-\frac{ix^T y'}{m}} m^{-s} dy$$

Dengan menggunakan Teorema Terdominasi Lebesgue, diperoleh

$$\lim_{m\to\infty} \hat{g}\left(\frac{x}{m}\right) = (2\pi)^{-\frac{s}{2}} \int_{\mathbb{R}^s} g(y') \lim_{m\to\infty} e^{-\frac{ix^T y'}{m}} dy = (2\pi)^{-\frac{s}{2}}.$$

Selanjutnya, integralkan kedua ruas dan gunakan Lemma Fatou, sehingga

$$\begin{aligned}(2\pi)^{-\frac{s}{2}} \int_{\mathbb{R}^s} d\mu(x) &= \int_{\mathbb{R}^s} \lim_{m\to\infty} \hat{g}\left(\frac{x}{m}\right) d\mu(x) \\ &\leq \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^s} \hat{g}\left(\frac{x}{m}\right) d\mu(x) \\ &= \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^s} \phi(x) g_m(x) dx \\ &= \phi(0).\end{aligned}$$

Hal tersebut mengakibatkan

$$\int_{\mathbb{R}^s} d\mu(x) \leq (2\pi)^{\frac{s}{2}} \phi(0),$$

dengan kata lain total masa μ terbatas. Karena μ hingga, diperoleh

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^s} \phi(\omega) g_m(x-\omega) d\omega \\ &= \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^s} \hat{g}_m(x-\omega) d\mu(\omega) \\ &= \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^s} e^{-i\omega^T x} \hat{g}_m(-\omega) d\mu(\omega) \\ &= (2\pi)^{-\frac{s}{2}} \int_{\mathbb{R}^s} e^{-ix^T \omega} d\mu(\omega)\end{aligned}$$

Dengan demikian, terbukti bahwa setiap fungsi semi definit positif yang kontinu merupakan transformasi Fourier dari suatu ukuran Borel yang bernilai hingga. ■

Salah satu manfaat Teorema Bochner adalah sebagai alat untuk membuktikan karakterisasi fungsi definit positif seperti yang dibahas oleh Karimah (2017). Aplikasi dari teorema ini juga digunakan dalam bidang statistik, khususnya terkait *time series.* Dalam analisis harmonik, Teorema Bochner menyatakan bahwa fungsi semi definit positif yang kontinu pada grup abelian yang kompak lokal bersesuaian dengan ukuran hingga yang taknegatif pada grup dual Pontryagin.

Bab V Kesimpulan

Dalam tesis ini telah diidentifikasi bahwa salah satu syarat cukup fungsi semi definit positif pada ruang linear bernorm adalah memenuhi kondisi

$$\|f(x) - f(y)\|^2 \leq 2f(0)Re[f(0) - f(y - x)].$$

Lebih jauh, jika fungsi semi definit positif kontinu pada 0, maka fungsi tersebut kontinu seragam pada ruang linear bernorm. Selain itu, fungsi ini juga terbatas, yaitu pada $f(0) \geq 0$ dan $f(-x) = \overline{f(x)}$. Di sisi lain, fungsi semi definit positif memiliki sifat ketertutupan terhadap penjumlahan dan perkalian.

Dalam tesis ini juga telah dibuktikan karakterisasi fungsi semi definit positif di $\mathbb{R}^s$ terkait transformasi Fourier, yakni suatu fungsi kontinu adalah fungsi semi definit positif jika dan hanya jika fungsi tersebut merupakan transformasi Fourier dari suatu ukuran Borel berhingga yang taknegatif pada $\mathbb{R}^s$ atau yang dikenal sebagai Teorema Bochner.

Masih banyak hal menarik yang dapat dipelajari dari fungsi semi definit positif, contohnya seperti barisan fungsi semi definit positif. Selain itu, perluasan dari fungsi semi definit positif dan aplikasinya juga menarik untuk dipelajari.

Teorema Bochner juga memberikan manfaat dalam bidang matematika terapan. Salah satu teorema berkaitan dengan Teorema Bochner adalah representasi Herglotz yang berhubungan dengan masalah momen.

DAFTAR PUSTAKA

Cheney, W., dan W. Light. (2009): *A Course in Approximation Theory,* American Mathematical Society.

Fasshauer, G. F. (2007): *Meshfree Approximation Methods with MATLAB*, Interdisciplinary Mathematical Sciences, Vol. 6. World Scientific Publishing Company.

Herlinawati, E. (2017): *Interpolasi dengan Fungsi Radial*, Tesis Program Magister, Institut Teknologi Bandung.

Karimah, V. M. (2017): *Karakterisasi Fungsi Definit Positif*, Tesis Program Magister, Institut Teknologi Bandung.

Loomis, L. H. (1953): *An Introduction to Abstract Harmonic Analysis*, Van Nostrand.

MacCluer, B. D. (2009): *Elementary Functional Analysis*, Springer, New York.

Muchlis, A. (2014): *Analisis Matriks*, Diktat Kuliah. Bandung: Program Studi Magister Matematika.

Nurjanah, M. (2017): *Teorema Bernstein-Widder untuk Fungsi Completely Monotone*, Tesis Program Magister, Institut Teknologi Bandung.

Stewart, J. (1976): *Positive Definite Functions and Generalizations, An Historical Survey*, Journal of Mathematics, Vol. 6. Rocky Mountain Mathematic Consortium.

Wendland, H. (2005): *Scattered Data Approximation*, Cambridge University Press.